UDC 621.391.1

最適通信方式
—マトリクス変換による伝送路と情報の整合問題—

尾佐竹　徇　　田中　英彦

あらまし　幾つかの並列伝送路と幾つかの送信情報があった場合にそれら相互の整合を取って情報伝送をおこなう方式として，送信情報に適当なマトリクス変換を施す方式を一般的に解明した．伝送路としては相互にチャネル間干渉があり加わる雑音も相関のあるものを取り扱い，また情報は互いの相関行列がわかっているとしている．これらの条件と伝送チャネル数，情報数とが与えられると最適送信行列および最適受信行列が定まりその時の出力 SNR も定まる．本方式は応用の範囲が広く並列伝送の最適化のみならず，たとえば直列伝送における符号間干渉の改善，テレビ等の情報帯域圧縮，情報数と伝送路数とが異なる場合の最適伝送，標本化周波数と符号ビット数の関係，また最適フィルタ合成法等にも適用しうるものである．

1. ま え が き

最近の通信方式の動向として，送信側の入力情報に変換を施し伝送路を並列に使用して情報伝送をおこなう方式が注目されるようになり，アダマール変換を用いた通信方式(1)，直交変換による画像帯域圧縮方式(2)等各種の提案や解析がおこなわれている．しかし現在までのところ，送信側，受信側におけるマトリクス変換を一般的に論じて送信側情報にいかなる変換をおこなうのがよいかを明らかにしたものがない．

本論文はその点に関する解明をしたものであって，伝送チャネル数と送信情報数とが異なる場合の問題をも明らかにした．また上記の諸例が全体としてどういう位置にあるかということも与えている．解析に用いた伝送路としては相互に干渉があることと減衰が異なることを仮定して一般的に取り扱い，また加わる雑音についてはその性質を問わないが各伝送路の雑音相互の相関がわかっているものとしている．本方式を用いた種々の応用についてはここでは触れずつぎの機会に譲ることにするが，たとえばつぎのような方面が考えられる．並列伝送の最適化，並列のみならず直列伝送における符号間干渉の改善(3),(4)，テレビ等の信号帯域圧縮(2)，情報数と伝送路数とが異なる場合の変換方式，PCM 等の標本化周波数と符号化ビット数の互換性に対する解析，また伝送特性と情報の性質との両方を考慮した最適フィルタ合成法等である．

尾佐竹　徇，田中英彦：正員　東京大学工学部電気工学科
Optimum Communication System —Information Matching by Matrix Conversion—. By TONAU OSATAKE and HIDEHIKO TANAKA, Members (Faculty of Engineering, University of Tokyo, Tokyo).
論文番号：昭 44-632［A-159］

2. マトリクス変換方式

2.1 方式のモデル

図1はマトリクス変換を用いた並列伝送方式のモデルである．伝送は離散的なものであるとし，送るべき情報は k 次元のアナログ列ベクトル $\boldsymbol{X}$ である．まず相関行列が R の情報ベクトル $\boldsymbol{X}$ を送信行列 A（m 行 k 列）に通して m 次元の送信ベクトル $\boldsymbol{S}$ を作る．これを伝送するが，伝送路は相互に干渉と減衰とがありこれを行列 T(m 行 m 列）で表現する．伝送路ではさらに平均0の雑音ベクトルが加わるが伝送路ごとの雑音は互いに相関（行列 $\boldsymbol{Q}$, m 行 m 列）を持っているものとする．かくて受信ベクトル $\boldsymbol{r}$ として受信され，受信側では $\boldsymbol{r}$ を k 行 m 列の受信行列 D に通して受信情報ベクトル $\boldsymbol{Y}$ をうるものとする．つぎに図1の記号について示しておく．

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$	: $\{x_i\}$, $\{y_i\}$	(k 次)
$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{r}$	: $\{S_i\}$, $\{r_i\}$	(m 次)
$\boldsymbol{n}$	: $\{n_i\}$	(m 次)
A	: $\{a_{ij}\}$	($m\times k$ 次)
D	: $\{d_{ij}\}$	($k\times m$ 次)

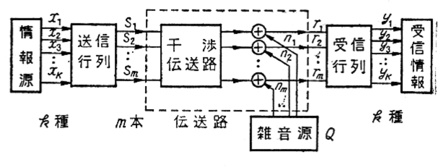

図 1　マトリクス変換方式
Fig. 1—Matrix conversion system.

$R \triangleq E_x\{\boldsymbol{X} \cdot {}^t\boldsymbol{X}\} : \{\rho_{ij}\}$ ($k \times k$ 次)

$Q \triangleq E_n\{\boldsymbol{n} \cdot {}^t\boldsymbol{n}\} : \{q_{ij}\}$ ($m \times m$ 次)

$T : \{t_{ij}\}$ ($m \times m$ 次)

$\Phi : \{\varphi_i$; 対角行列$\}$ ($k \times k$ 次)

ただし，E_x，E_n はそれぞれ情報ベクトル $\boldsymbol{X}$，雑音ベクトル $\boldsymbol{n}$ についての集合平均を意味し，^{t} は転置を表わす．また Φ は後述の重み行列であって成分が φ_i の対角行列である．

2.2 解析の条件

前節で述べたマトリクス変換方式を解析する場合の条件と最適性評価関数とをここで与えておく．まず方式の条件は送信電力条件と受信情報規格化条件とであって，送信電力条件は m チャネルの送信電力の総和が一定ということで，すなわち

$$P_S = \sum_{i=1}^{m} E_x\{S_i^2\} \quad (1)$$

が一定とする．この条件では m 個のチャネル電力総和のみ一定であって各チャネルごとの大きさについては問うていないが，各チャネルごとの電力を考慮する場合については付録1で考察する．つぎに規格化条件とは受信情報ベクトルの雑音に対する平均が送信情報と一致することであって

$$\boldsymbol{X} = E_n\{\boldsymbol{Y}\} \quad (2)$$

と表わされる．この条件については以下に示すように解析を2通りに分ける．つぎの **3**. はこの条件の入った場合であるが伝送チャネル数 m が送信情報数 k より大きいか等しくないと意味を持たない．**4**. ではこの規格化条件を入れずに解いた方式を示す．この場合は m と k との大小関係は自由である．この条件は適用システムにより入れるべきか否か異なるものなので両方について解析をおこなう．さて最適性評価関数としては，各受信情報の雑音電力に重み $\{\varphi_i\}$ を付けた

$$P_N = \sum_{i=1}^{k} E_{x,n}\{\varphi_i \cdot (y_i - x_i)^2\} \quad (3)$$

を用い P_N を最小とするものを最適マトリクス変換と称することにした．つぎに以上の式を行列で表現する．以下，行列の i 列成分は小文字のゴシック体に添字 i を付けて示し行成分の列ベクトル表示はそのゴシックに*を付けて区別することにする．まず方式の定義から

$$\boldsymbol{S} = A\boldsymbol{X} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{r} = T\boldsymbol{S} + \boldsymbol{n} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{Y} = D\boldsymbol{r} \quad (6)$$

したがって送信電力条件式 (1) はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} P_S &= \sum_{i,j} \rho_{ij} \cdot {}^t\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j \\ &= \mathrm{tr}(AR^tA) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ただし，tr(・) とは行列の対角成分の和を示す．

また規格化条件はつぎのようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= E_n\{DTA\boldsymbol{X} + D\boldsymbol{n}\} \\ &= DTA\boldsymbol{X} \\ \therefore\ DTA &= I_k \end{aligned} \quad (8)$$

ただし，I_k は k 次の単位行列である．

評価関数についても同様にして

$$\left.\begin{aligned} P_N &= \sum_{i=1}^{k} \varphi_i({}^t\boldsymbol{m}_i{}^* R \boldsymbol{m}_i{}^* + {}^t\boldsymbol{d}_i{}^* Q \boldsymbol{d}_i{}^*) \\ &= \mathrm{tr}({}^tM\Phi MR) + \mathrm{tr}({}^tD\Phi DQ) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ただし　$M = DTA - I_k$

今までのモデルでは送信ベクトル，受信ベクトル，雑音ベクトル等すべての成分にアナログ値を用いているが，実際のシステムではたとえばPAMのようなシステムと考えればよい．すなわち第 i チャネルでは S_i という信号が伝送されるが時間波形としては図2のようにパルス高が S_i に比例する幅 τ の方形波を用いる．この波形が伝送路の特性によって減衰し，またチャネル相互に干渉を生じさらに雑音が加わって受信される．チャネルとしては時分割でのチャネルを考えれば，干渉とはパルス波形のなまりによる尾ひれの重なりによるものであるし，並列に何本か伝送路がある場合には干渉は伝送路の結合等によるものである．また幾つかの直交波のごとくものを考えれば干渉は伝送路の減衰による直交条件の劣化で生じる．こうして干渉と雑音との加わったPAM波を受信した受信側ではこの波形をまず最適フィルタに通してあるスカラ値に変える．それが r_i である．図2のような方形波に雑音の加わっただけの場合は，その最適フィルタは τ の間の積分であり積分出力を r_i とすればよい．したがって受信値 r_i は

$$r_i = t_{i1}s_1 + t_{i2}s_2 + \cdots + t_{ii}s_i + \cdots + t_{im}s_m + n_i \quad (10)$$

となるが $t_{ii}s_i$ 以外は干渉であり，また n_i は

$$n_i = \int_t^{t+\tau} n_i'(t)\,dt \quad (11)$$

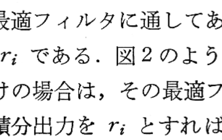

図2　i チャネルの伝送波形
Fig. 2—Transmission waveform at i channel.

ただし $n_i'(t)$ は伝送路で加わる雑音波形で与えられるランダム変数であって，これのセット $\{n_i\,;\,i=1,\cdots,m\}$ からできる相関行列が Q に相当する．

3．最適マトリクス変換 I（規格化の入る場合）

規格化条件 (8) を入れるということは，復調出力に元の送信情報と雑音のみが出る場合で他の情報からの漏れがない場合である．これは伝送チャネル数 m の方が送信情報数 k より（厳密には情報 $\boldsymbol{X}$ の階数より）大でないと一般に実現できない．

3.1 最適条件式

条件式 (7), (8) の下，評価関数 (9) を最小化ならしめるための条件式を導く．まず規格化条件式の転置を取って第 j 列を取り出せば，k 次単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_j$ として

$$^t(TA)\boldsymbol{d}_j^*=\boldsymbol{e}_j \quad j=1,2,\cdots,k \tag{12}$$

$\boldsymbol{d}_j^*$ は m 次ベクトル ($m\geqq k$) であるから送信行列 A が定まっても $\boldsymbol{d}_j^*$ は一意的に定まらない．そこで $\boldsymbol{d}_j^*$ を2つに分けて，k 次ベクトル $\boldsymbol{d}_{j\alpha}^*$ と m-k 次ベクトル $\boldsymbol{d}_{j\beta}^*$ とに分解し，また行列 $^tA^tT\triangleq H$ ($k\times m$) をも2つに分けて $k\times k$ の H_α と $k\times(m-k)$ の H_β とに分けると

$$H\boldsymbol{d}_j^*=H_\alpha\boldsymbol{d}_{j\alpha}^*+H_\beta\boldsymbol{d}_{j\beta}^* \tag{13}$$

行列 H は一般に階数が k である（そうでないと $\boldsymbol{X}$ を完全に複号できない）から正方行列 H_α として階数を k と仮定しても一般性は失なわれない．したがって H_α の逆行列は存在し式 (12) は $\boldsymbol{d}_{j\beta}^*$ を任意のベクトルとして ($m-k$ 次) つぎのように解くことができる．

$$\boldsymbol{d}_j^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{j\alpha}^*\\ \boldsymbol{d}_{j\beta}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_\alpha^{-1}\boldsymbol{e}_j-H_\alpha^{-1}H_\beta\boldsymbol{d}_{j\beta}^*\\ \boldsymbol{d}_{j\beta}^*\end{bmatrix} \tag{14}$$

ただし $^tT=(^tT_\alpha,\,^tT_\beta)$, $^tT_\alpha : m\times k$, $^tT_\beta : m\times(m-k)$ とした時

$$H_\alpha={}^tA^tT_\alpha,\quad H_\beta={}^tA^tT_\beta \tag{15}$$

つぎにラグランジェの未定係数を λ として式 (7), (9) から

$$L=P_N+\lambda P_s \tag{16}$$

を作り，式 (14) の条件の下任意の微少変化 $\delta\boldsymbol{a}_i$, $\delta\boldsymbol{d}_{j\beta}^*(i,j=1,2,\cdots,k)$ に対する L の変分を作るとそれを0とするものが最適マトリクスである．まず $\delta\boldsymbol{a}_i$ に対する変分式からつぎの行列方程式が成立することが導かれる（付録2参照）．

$$\lambda AR={}^tT^tD\Phi DQ_\alpha H_\alpha^{-1} \tag{17}$$

ただし $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{Q}_\alpha,\boldsymbol{Q}_\beta)$, $\boldsymbol{Q}_\alpha : m\times k$, $\boldsymbol{Q}_\beta : m\times(m-k)$

つぎに $\delta\boldsymbol{d}_{j\beta}^*$ に対する変分式から

$$DQ_\beta=DQ_\alpha H_\alpha^{-1}H_\beta \tag{18}$$

が成立し，この2式を組み合わせれば結局

$$\Phi DQ^tD=\lambda^tAAR \tag{19}$$

が得られる．上式はまた変換することによって（付録3参照）

$$\lambda^tAAR^tAW^{-1}A=\Phi \tag{20}$$

ただし　$W=T^{-1}Q^tT^{-1}$

と変形することもできる．ここで $\det W\neq 0$ を用いているが以後この章では $\det R\neq 0$ も仮定する．前者はチャネルごとに異なった情報を送りうるための必要条件であり，後者は送るべき情報が一次独立であることでこれらを仮定しても一般性は失われない．

以上式 (19) または (20) が最適マトリクス変換の満たすべき条件式であり，未定係数 λ は送信電力条件 (7) から定めることができこうして送受信行列 A, D は定まる．

3.2 最適マトリクス変換の一般解

前節で与えた最適マトリクス条件を解き一般解を与えよう．情報の相関行列 R, 伝送路および雑音による影響を与える行列 W はともに対称行列であるから固有直交行列 U, V が存在しつぎのように対角化することができる．

$$^tUWU=N_0\cdot W_0 \quad U=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m) \tag{21}$$

$$^tVRV=\sigma^2\cdot R_0 \quad V=(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\cdots,\boldsymbol{V}_k) \tag{22}$$

$$W\boldsymbol{u}_i=N_0\cdot w_i\boldsymbol{u}_i,\quad R\boldsymbol{V}_i=\sigma^2\cdot\rho_i\boldsymbol{V}_i$$

ただし，W_0, R_0 は成分が $\{w_i\}$, $\{\rho_i\}$ の対角行列．N_0, σ^2 はそれぞれ雑音電力，送信情報電力の次元を持つ定数であり便宜上のスカラ値である．たとえば雑音電力がどのチャネルも同じである場合は N_0 として各チャネルに加わる伝送路雑音電力を取ればよく，送信情報がすべて等電力の場合 σ^2 としてその電力を取っておくと便利である．

さてこの行列 U, V を用いて A をつぎのように変換する．

$$A=UA_1{}^tV \tag{23}$$

すると最適マトリクス条件式 (20) は書き換えることができ，

$$\sigma^2\lambda\cdot{}^tA_1A_1R_0{}^tA_1W_0^{-1}A_1=N_0\cdot{}^tV\Phi V \tag{24}$$

ここで対角行列 R_0, W_0 の対角成分（必ず正値）の $\sqrt{\ }$ を対角成分とする新しい対角行列 R_2, W_2 を作り

$$R_0=R_2R_2,\quad W_0=W_2W_2 \tag{25}$$

これを用いて A_1 をさらにつぎのように A_2 へ変換すると

$$A_1=W_2A_2R_2^{-1} \tag{26}$$

式 (24) はつぎのようになる．

$$\sigma^2\lambda\cdot{}^tA_2W_0A_2{}^tA_2A_2=N_0\cdot R_2{}^tV\Phi VR_2 \tag{27}$$

右辺の式を G と置くとこれは対称行列だから対角化が可能であり，その固有行列 Z を用いて

$$A_2=A_3{}^tZ \tag{28}$$

式 (27) はつぎの形に変形される．

$$\sigma^2\lambda\cdot{}^tA_3W_0A_3{}^tA_3A_3=N_0\cdot G_0 \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned}&G\triangleq R_2{}^tV\Phi VR_2\ (k\times k)\\&{}^tZGZ=G_0\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

一方送信電力条件式 (7) は A_3 を用いて変形すれば

$$P_s=\sigma^2\cdot\mathrm{tr}({}^tA_3W_0A_3) \tag{31}$$

のようになりしたがってこの条件下式 (29) を解けばよい．式中 G_0, W_0 は対角行列であり A_3 の階数は A と等しく k である．よって式 (29) の解から階数が k のものを求めればよい．A_3 としてたとえば対角行列 $A_0(k\times k)$ を用いてつぎの形を仮定する（これで十分でありこの形が最適なことは証明できる．付録4参照）．

$$A_3=\begin{bmatrix}A_0\\\hdashline 0\end{bmatrix}<k,\quad A_0=\begin{bmatrix}a_1 & & 0\\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots\ a_k\end{bmatrix} \tag{32}$$

これを用いると式 (29) は対角行列間の関係式

$${}^tA_0W_\alpha A_0{}^tA_0A_0=N_0\cdot G_0/\lambda\sigma^2 \tag{33}$$

ただし，W_α は W_0 の k 次小行列（後程定める）となり，これは行列 G の固有値 $g_i(i=1, 2, \cdots, k)$ を用いてつぎのように解くことができる．

$$a_i{}^2=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{N_0}{\sigma^2}}\cdot\sqrt{\frac{g_i}{w_i}} \tag{34}$$

これを条件式 (31) に代入すると λ は定まる．

$$\lambda=\frac{N_0\sigma^2}{P_s{}^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{w_ig_i}\right)^2 \tag{35}$$

つぎに各情報出力の雑音電力を考えよう．式 (19) を変形すれば式 (34) を用いて

$$DQ^tD=N_0\cdot\Xi A_0{}^{-1t}A_0{}^{-1t}\Xi \tag{36}$$

ただし，$\Xi=VR_2Z$: 成分 $\{\xi_{ij}\}$

が得られ，したがって受信値 y_i に含まれる雑音電力 p_i は式 (9) を用いてつぎのように求まる．

$$p_i=N_0\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\xi_{ij}}{a_j}\right)^2 \tag{37}$$

y_i 中の信号成分電力は $\overline{x_i{}^2}=\sigma^2\rho_{ii}$ に等しい．したがって y_i の SNR はつぎのように表わされる．

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i=\frac{\sigma^2\rho_{ii}}{p_i} \tag{38}$$

以上からつぎのような結果が得られる．

最適送受信行列として

$$A=UW_2A_3\Xi^{-1} \tag{39}$$

$$D=\Xi D_3W_2{}^{-1t}UT^{-1} \tag{40}$$

ただし，$\Xi=VR_2Z$

$$A_3=\begin{bmatrix}A_0\\\hdashline 0\end{bmatrix}<k,\quad D_3=(A_0{}^{-1}\overset{k}{\vdots}0),\quad A_0=\begin{bmatrix}a_1 & & 0\\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots\ a_k\end{bmatrix}$$

$$a_i=\frac{\sqrt{P_S}}{\sigma}\cdot\left(\frac{g_i}{w_i}\right)^{1/4}\Big/\sqrt{\sum_{j=1}^{k}w_jg_j} \tag{41}$$

を用いれば，第 i 情報の SNR は

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i=\frac{P_S\rho_{ii}}{N_0}\Big/\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_jg_j}\right]\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{w_j}{g_j}}\cdot\xi_{ij}{}^2\right] \tag{42}$$

ただし，w_i, g_i, ρ_i は行列 W/N_0, G, R/σ^2 の固有値であり，W_2, R_2 は $\sqrt{w_i}$, $\sqrt{P_i}$ を対角成分とする行列である．U, V, Z はそれぞれ W, R, G の固有行列である．ここで W, G とは

$$W=T^{-1}Q^tT^{-1}$$

$$G=R_2{}^tV\Phi VR_2$$

固有値の対応．

行列 W, G はそれぞれ m, k 次の対称正方行列である．したがって固有値はそれぞれ m 個，k 個存在しすべて正である．ところで今までは $m\geqslant k$ を仮定してきたので G の固有値はすべて式 (42),(41) 等に表われているが，W の固有値は m 個のうち k 個だけ用いている．その選び方は自由であるから評価関数をできるだけ小さくするような取り方をすればよい．P_N は式 (19) 等から

$$P_N=N_0\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_jg_j}\right]^2 \tag{43}$$

となるので，まず W の固有値については m 個から小さい順に k 個取ればよい．すなわち

$$w_1\leqslant w_2\leqslant\cdots\leqslant w_k\leqslant\cdots\leqslant w_m \tag{44}$$

として順に番号をふる．つぎに G の固有値をこのようにして選んだ $\{w_j\}$ とどのように対応させるかを考えるに，今 $\{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ と並べたのが P_N を最小にするとすればそのうち2つ，たとえば g_i と g_j とを入れ換えると P_N は必ず大きくなる．したがって

$$\begin{aligned}&\sqrt{w_ig_i}+\sqrt{w_jg_j}-(\sqrt{w_ig_j}+\sqrt{w_jg_i})\\&=(\sqrt{w_i}-\sqrt{w_j})(\sqrt{g_i}-\sqrt{g_j})\leqslant 0\end{aligned} \tag{45}$$

$i<j$ とすると $\sqrt{w_i}\leqslant\sqrt{w_j}$ よって $g_i\geqslant g_j$ が必要となる．ゆえにこれがどんな i, j の組み合わせについても成立するためには G の固有値を大きい順に並べて番号をふればよい．ゆえに，

$$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_k \tag{46}$$

3.3 特殊な場合の解

(1) 情報内相関のない場合

R が対角行列であるので，したがって

$$A=U\left[\frac{A_0'}{0}\right]<k,\quad A_0'=\begin{bmatrix} a_1' & & 0 \\ & a_2' & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_k' \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$a_i'=\frac{\sqrt{P_S}}{\sigma}\left(\frac{\rho_i\varphi_i}{\omega_i}\right)^{1/4}\Big/\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_j\rho_j\varphi_j}} \tag{48}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i=\frac{P_S}{N_0}\cdot\sqrt{\frac{\rho_i\varphi_i}{w_i}}\Big/\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_j\rho_j\varphi_j}\right] \tag{49}$$

重み φ_i として情報ごとの SNR の比を

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1:\left(\frac{S}{N}\right)_2:\cdots:\left(\frac{S}{N}\right)_k=\theta_1:\theta_2:\cdots:\theta_k \tag{50}$$

となるよう定めたとすると式 (48)，(49) は

$$a_i'=\frac{\sqrt{P_S}}{\sigma}\sqrt{\theta_i}\Big/\sqrt{\sum_{j=1}^{k}w_j\theta_j} \tag{51}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i=\frac{P_S}{N_0}\theta_i\Big/\left[\sum_{j=1}^{k}w_j\theta_j\right] \tag{52}$$

(2) 重みが均一の場合

$$A=U\left[\frac{A_0''}{0}\right]{}^tV,\quad A_0''=\begin{bmatrix} a_1'' & & 0 \\ & a_2'' & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_k'' \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$a_i''=\frac{\sqrt{P_S}}{\sigma}\left(\frac{w_i}{\rho_i}\right)^{1/4}\Big/\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_j\rho_j}} \tag{54}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i=\frac{P_S}{N_0}\rho_{ii}\Big/\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_j\rho_j}\right]\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_j\rho_j}\cdot v_{ij}^2\right] \tag{55}$$

また，全情報出力電力対全雑音電力比はつぎのようになる．

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T=\frac{P_S}{N_0}\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right)\Big/\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_j\rho_j}\right]^2 \tag{56}$$

ただし，ρ_i は大きい順に番号をふったものである．

4. 最適マトリクス変換 II（規格化のない場合）

復調出力に規格化条件 (8) を入れずにより自由な範囲で評価関数を最小とするマトリクス変換について述べる．この場合は前章と異なり，伝送チャネル数と送信情報数との間にはなんら制限はなく $m \geqq k$, $m<k$ いずれの場合でも以下の解析は成立する．

4.1 最適条件式

評価関数式 (9) において，まず送信行列 A が定まっているものとしその時の最適受信行列Dを求める．詳しい導出は省くが前章と同様な手法で行列Dの第 j 行 $\boldsymbol{d}_j{}^*$ のみ微少変化したとし P_N の変分を取って 0 と置くことによりつぎの式が得られる（付録5参照）．

$$D(Q+TAR^tA^tT)=R^tA^tT \tag{57}$$

これが最適受信行列の満たす関係式である．前章と同じく未定係数 λ を用いて式 (16) を作り，式 (57) を満たしながら行列Aの第 i 列 $\boldsymbol{a}_i$ に対する変分 δL を求めると最適送信行列の満たすべき条件として（付録6参照），

$$\lambda A+{}^tT^tD\Phi DTA={}^tT^tD\Phi \tag{58}$$

が得られる．したがってこの式を (57) と連立させて解き，λ を電力条件から定めれば A, D が求まる．$C \triangleq DT$ とすると上2式はまたつぎのように書くことができる．

$$\lambda A={}^tC\Phi-{}^tC\Phi CA \tag{59}$$

$$C=R^tA[W+AR^tA]^{-1} \tag{60}$$

ただし，W は前と同じく $W=T^{-1}Q^tT^{-1}$

4.2 最適マトリクス変換の一般式

詳細は省くがこれも前章と同様な手法で解くことができる．A, C を変換して

$$A=UW_2A_3\Xi^{-1} \tag{61}$$

$$C=\Xi C_3W_2{}^{-1t}U \tag{62}$$

と置けば（W_2, U, Ξ の定義は前と同様），A_3, C_3 はつぎのように求まる．

$$\left.\begin{array}{l} \bigcirc\, m \geqq k \text{ の時} \\ A_3=\left[\dfrac{A_0}{0}\right]<k,\quad C_3=(C_0 \overset{k}{\vee} 0) \\ \bigcirc\, m<k \text{ の時} \\ A_3=A_0 \overset{m}{\vee} 0),\quad C_3=\left[\dfrac{C_0}{0}\right]<m \end{array}\right\} \tag{63}$$

ただし，A_0, C_0 は $l=\mathrm{Min}\{m, k\}$ とした時つぎのごとし．

$$A_0=\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_l \end{bmatrix},\quad C_0=\begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & c_l \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$a_i^2=\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\left(P_S+N_0\cdot\sum_{j=1}^{l}w_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{l}\sqrt{w_jg_j}\right)}\cdot\sqrt{\frac{g_i}{w_i}}-N_0\right] \tag{65}$$

$$c_i=\frac{\sigma^2a_i}{N_0+\sigma^2a_i^2} \tag{66}$$

つぎに以上の最適マトリクス変換を用いた時，y_i に含まれる雑音電力 p_i は

$$p_i=\sigma^2\sum_{j=1}^{k}\xi_{ij}{}^2(C_3A_3-I_k)_{jj}{}^2+N_0\sum_{j=1}^{k}\xi_{ij}{}^2(C_3)_{jj}{}^2 \tag{67}$$

で与えられるがこの場合の出力の情報成分の電力は前章と異なり一般に $\sigma^2\rho_{ii}$ ではない．したがって SNR の意味が異なってくるがつぎの定義に従うことにする．

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i \triangleq \sigma^2\rho_{ii}/[E_{x,n}\{(x_i-y_i)^2\}] \qquad (68)$$

さて i 番目情報の雑音電力を式 (67) から求めるとつぎのようになる．

○$m \geqq k$ の時

$$p_i=\frac{\sigma^2 N_0\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{w_j g_j}\right]\left[\sum_{j=1}^{k}\xi^2{}_{ij}\sqrt{\frac{w_j}{g_j}}\right]}{\left[P_S+N_0\sum_{j=1}^{k}w_j\right]} \qquad (69)$$

○$m<k$ の時

$$p_i=\frac{\sigma^2 N_0\left[\sum_{j=1}^{m}\sqrt{w_j g_j}\right]\left[\sum_{j=1}^{m}\xi_{ij}{}^2\sqrt{\frac{w_j}{g_j}}\right]}{\left[P_S+N_0\sum_{j=1}^{m}w_j\right]}+\sigma^2\sum_{j=m+1}^{k}\xi_{ij}{}^2 \qquad (70)$$

固有値の選び方は前章と同様，W の固有値については小さい順に並べ G の固有値については大きい順に並べて 1, 2, 3,… と番号をふってゆけばよい．

特殊な場合の一例を示しておこう．

$m<k$ で（伝送チャネル数が送信情報数より小さい時）重みが均等な場合を考えると全情報出力対全雑音電力比は式 (70) を用いて

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T=\frac{\left(\frac{P_S}{N_0}+\sum_{j=1}^{m}w_j\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right)}{\left[\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{w_j\rho_j}\right)^2+\left(\frac{P_S}{N_0}+\sum_{j=1}^{m}w_j\right)\left(\sum_{j=m+1}^{k}\rho_j\right)\right]} \qquad (71)$$

と与えられる．ただしこの SNR の定義は式 (68) で与えた場合と同様，出力信号電力としては送信情報の平均電力を用いたものである．$P_S \gg N_0$ の場合を考えると上式はほぼ $\{\rho_i\}$ のみで定まることになる．すなわち伝送チャネル数が情報数より小さい場合，出力の SNR は送信情報の性質のみで定まり冗長性の高いものだとかなり SNR よく復元できることを示している．

5. 最適マトリクス変換適用の方向

今までに述べたマトリクス変換は種々の方面に適用しうるが，その詳細は省いてここでその方法と方向について簡単に記しておく．

（1） まず送信情報数と伝送チャネル数 m との整合問題であるが，送信情報の冗長性を省いて帯域圧縮等を目的とする場合は $k>m$ の時に相当し，送信情報の性質，伝送路特性をできるだけうまく取り入れて圧縮効果をねらわねばならない．テレビの帯域圧縮はその一例であり，直交変換[2]，アダマール変換[1]等を用いた方法が発表されているがこれらは必ずしも情報や伝送路特性について考慮を払われていない．テレビ信号の変換をおこなう時，まず問題となるのが変換する情報セットの取り方であるが，いずれにせよ情報セットが定まればその相関行列も定まり，したがって元の信号との誤差電力が最も小さくなるようなマトリクス変換を，たとえば式 (61)～(66) により定めることができる．こうして定まった変換方式は，情報，伝送特性ともに考慮されたものである．またこれとは逆に伝送チャネル数のほうが大きい場合は，**4**.，**3**. どちらの方法によっても解析が可能であるが，これらによって最も有効的な伝送路の使用方式を導くことができよう．

（2） つぎにディジタルパルス伝送の誤り率を改善する目的でよくおこなわれる符号間干渉補償方式に対しては直列，並列いずれの伝送にでも適用できるが，伝送路行列 T を干渉量のみで表わすだけで最適なアナログ補償方式が得られる．よく知られているタップ付遅延線方式[4]はその一つであり，受信側でおこなうアナログ変換であるが，本論文による方式は送信側，受信側の両方で変換をおこなう場合に相当し，アナログ補償方式による改善の上限を与えている．この解析には **3**. の方式が便利である．

（3） また PCM 伝送における標本化周波数と 1 サンプルの符号化ビット数との互換性に対する応用も考えられる．その他，直並列変換方式とか最適フィルタ合成法としても用いることができる．後者は送信情報のスペクトルが解っている時，伝送路特性および加算雑音スペクトルを考慮して出力波形のひずみと雑音との電力が最も小さくなるように受信側で入れる最適フィルタの合成である．この場合は **4**. の解析が便利である．ここでいうフィルタはタップ付遅延線で構成されるものであるが，送信ベクトルは送信信号の幾つかのサンプルである．送信側のフィルタ特性 A が与えられれば最適な受信フィルタ D（タップの重み）は式(57)で定まり，A もまた自由に選べるとすれば式 (61), (62)から送受信フィルタを定めることができる．

6. 結論および今後の問題

以上，送信情報を一度マトリクス変換してから伝送するという方式一般について解析をおこない，伝送チャネル数と送信情報数とが異なる場合に情報内相関，伝送路特性，雑音内相関等をすべて考慮した時の最適マトリクス変換を求めその出力 SNR の式を与えることができた．本論文の条件としては送信全電力一定としており2つの解析をおこなったが，両者とも最適性の評価としては復調各情報に含まれる雑音電力に重みを付け加え合わせたものを最小とすることでおこなった．1つは復調各情報の雑音に対する平均が元の送信情報と同じであるという条件を付けた解析で，他にはそれを付けずより自由な形で復調信号と元の情報との差自体を雑音とした解析である．いずれにしてもその結果として最適マトリクス，出力 SNR ともに情報内相関行列，伝送路行列，雑音内相関行列，重み行列の固有値と固有ベクトルで表わすことができた．この解析は，今後のこの方面の方向を示すことができたと思われる．

謝辞　ご討論いただき，本方式の応用について有益なご示唆をいただいた本学秋山稔助教授に感謝する．

文献

（1） 瀧，羽鳥："アダマール変換を用いた PCM 通信方式"，信学誌，**49**，11，p. 2163（昭 41-11）．
（2） 榎本，芝田："直交変換によるテレビ符号化方式"，昭 41 連大，1436．
（3） 尾佐竹，田中："パルス間干渉の改善—ディジタル判定補償方式"，信学誌，**49**，10，p. 1843（昭 41-10）．
（4） R.W. Lucky: "Automatic equalization for digital communication", Bell Syst. tech. J. **44**, p. 547 (April 1965).

付録

1. 送信電力条件の拡張

今までは送信全電力を一定としてきたが，ここでそれを拡張しチャネルごとの送信電力に重み ψ_i（対角行列 Ψ）を付けた場合の式を示しておく．この重みは未知数のまま残しておいて解き，与えられるチャネルごとの電力比を満たすよう後から定めるというように使用してもよい．規格化条件を入れた場合についてのみ示そう．送信電力条件として

$$P_S=\sum_{i=1}^{m}\psi_i\cdot E_x\{S_i^2\} \qquad \text{(A-1)}$$

を置き，これが一定の下前と同様な評価関数を最小にする最適行列はつぎの関係式を満たすものである．

$$\lambda^t A\,\Psi\,AR^tAW^{-1}A=\Phi \qquad \text{(A-2)}$$

2. 送信行列の最適化 I

まず L をベクトル $\boldsymbol{d}_j^*$, $\boldsymbol{a}_i$ 等で表現すると式 (9)，(7) から

$$L=\sum_{s=1}^{k}\varphi_s{}^t\boldsymbol{d}_s{}^*Q\boldsymbol{d}_s{}^*+\lambda\sum_{i,j}\rho_{ij}{}^t\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j \qquad \text{(A-3)}$$

となり，$\boldsymbol{d}_{s\beta}{}^*$ は一定として $\delta\boldsymbol{a}_i$ に対する変分をとれば

$$\delta L=2\sum_{s=1}^{k}\varphi_s{}^t\boldsymbol{d}_s{}^*Q_\alpha\delta\,\boldsymbol{d}_{s\alpha}{}^*+2\,\lambda^t\boldsymbol{\rho}_i{}^tA\,\delta\,\boldsymbol{a}_i \qquad \text{(A-4)}$$

ただし $Q=(Q_\alpha,\ Q_\beta)$, Q_α: $m\times k$, Q_β: $m\times(m-k)$
$\boldsymbol{\rho}_i$ は R の第 i 列ベクトル．

$\boldsymbol{d}_{s\alpha}{}^*$ は式 (14) で表わされているから $\delta\boldsymbol{a}_i$ に対する変化を求めると

$$\delta\,\boldsymbol{d}_{s\alpha}{}^*=-H_\alpha{}^{-1}\boldsymbol{e}_i{}^t\boldsymbol{d}_s{}^*T\,\delta\,\boldsymbol{a}_i \qquad \text{(A-5)}$$

式 (A-4) にこれを代入し整理すればつぎのようになる．

$$\delta L=2[\lambda^t\boldsymbol{\rho}_i{}^tA-{}^t\boldsymbol{f}_i{}^tQ_\alpha{}^tD\,\Phi\,DT]\delta\,\boldsymbol{a}_i \qquad \text{(A-6)}$$

ただし $\boldsymbol{f}_i$ は $H_\alpha{}^{-1}$ の第 i 列ベクトル

任意の $\delta\boldsymbol{a}_i$ に対し $\delta L=0$ だから上式の［　］内は0である．転置をとり Φ が対角行列であることを用いて

$$\lambda A\,\boldsymbol{\rho}_i={}^tT^tD\,\Phi\,DQ_\alpha\boldsymbol{f}_i \qquad \text{(A-7)}$$

が得られ，さらにこれが任意の $i(i=1,2,\cdots,k)$ について成立するから結局つぎの行列方程式が得られる．

$$\lambda AR={}^tT^tD\,\Phi\,DQ_\alpha H_\alpha{}^{-1} \qquad \text{(20)}$$

3. 最適条件式の導出

$\boldsymbol{a}_i$ は一定として $\delta\,\boldsymbol{d}_{s\beta}{}^*$ に対する L の変分をとると

$$\delta L=2\,\varphi_s{}^t\boldsymbol{d}_{s\beta}{}^*(Q_\alpha\delta\,\boldsymbol{d}_{s\alpha}{}^*+Q_\beta\delta\,\boldsymbol{d}_{s\beta}{}^*) \qquad \text{(A-8)}$$

したがって，規格化条件式 (12) を用いると

$${}^t\boldsymbol{d}_s{}^*Q_\beta={}^t\boldsymbol{d}_sQ_\alpha H_\alpha{}^{-1}H_\beta \qquad \text{(A-9)}$$

が得られ，これが任意の $s(s=1,2,\cdots,k)$ について成立するので，つぎのような行列の関係式に変換される（式 (18)）．

$$DQ_\beta=DQ_\alpha H_\alpha{}^{-1}H_\beta \qquad \text{(A-10)}$$

つぎに式 (17) の左から ${}^tA$ を乗じ右から H_α を乗じると規格化条件より

$$\lambda^tAARH_\alpha=\Phi DQ_\alpha \qquad \text{(A-11)}$$

したがって式 (A-10) と (A-11) とを結合させることによって

$$\Phi\,DQ=\lambda^tAARH \qquad \text{(A-12)}$$

となり H として ${}^tA^tT$ を代入し右から ${}^tD$ を乗じれば

$$\Phi\,DQ^tD=\lambda^tAAR \qquad \text{(A-13)}$$

の条件式（本文式（19））が得られ，式（A-12）の両辺に右から $Q^{-1}TA$ を乗じることにより

$$\Phi=\lambda^t AAR^t AW^{-1}A \qquad \text{(A-14)}$$

ただし　$W=T^{-1}Q^t T^{-1}$

Aのみを含む最適送信行列条件式（20）が得られる．

4．行列 A_3 の一般形

式（29）を満たす行列 A_3 はこの他にも式（31）を満たしまた評価関数 P_N を最小とするものでなければならない．まず式（29）から得られる A_3 の形に対する制約条件を考える．

$$P_1={}^tA_3W_0A_3 \qquad \text{(A-15)}$$

$$P_2={}^tA_3A_3 \qquad \text{(A-16)}$$

とおくとこれらはいずれも対称行列であり，その積 P_1P_2 も式（29）から明らかなごとく対称（対角）である．したがって P_1 と P_2 とは交換可能であり，ある直交行列 T によって同時に対角化される．これを S_1, S_2 とし積を作ると，

$$S_1S_2=T^{-1}P_1P_2T=\frac{N_0}{\sigma^2\lambda}\cdot T^{-1}G_0T \qquad \text{(A-17)}$$

となり T は G_0 の固有行列とみなすこともできる．ところが G_0 は対角行列なのでしたがって T は単位行列である．ゆえに P_1, P_2 はそれ自身対角行列でなければならない．つぎに $A_3=(\boldsymbol{Z}_1, \cdots, \boldsymbol{Z}_k)$ とおくと（$\boldsymbol{Z}_i$; m 次ベクトル）電力条件式（31）より

$$\frac{P_S}{\sigma^2}=\sum_{j=1}^{k}{}^t\boldsymbol{Z}_iW_0\boldsymbol{Z}_i \qquad \text{(A-18)}$$

また式（29）のトレイスを取ると，P_1, P_2 が対角行列であることを用いて次式が成立する．

$$\lambda\cdot\frac{\sigma^2}{N_0}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}({}^t\boldsymbol{Z}_iW_0\boldsymbol{Z}_i)\cdot({}^t\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i)\right]=\sum_{i=1}^{k}g_i \qquad \text{(A-19)}$$

評価関数は式（9），(19）を用い，さらに A_3 に変換して

$$P_N=\lambda\cdot P_S \qquad \text{(A-20)}$$

であるから P_N を最小にすることは λ を最小にすることであり，式（A-18）の条件の下式（A-19）左辺の［ ］内を最大とすることに対応する．μ を未定定数として

$$K=\sum_{i=1}^{k}({}^t\boldsymbol{Z}_iW_0\boldsymbol{Z}_i)\cdot({}^t\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i)+\mu\sum_{i=1}^{k}({}^t\boldsymbol{Z}_iW_0\boldsymbol{Z}_i) \qquad \text{(A-21)}$$

を作り $\boldsymbol{Z}_i$ で変分することによって $\boldsymbol{Z}_i$ は単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i$（m 次）に比例することが導かれる．よって A_3 は，正方対角行列 A_0 を用いて式（32）のように表わされる（$\boldsymbol{Z}_i$ として与える単位ベクトルは一般に $\boldsymbol{e}_j$ であるが $j=i$ としても一般性は失われない．

5．受信行列の最適化 II

送信行列が定まっているものとしこの時の最適受信行列Dを求める．Dの第 j 行のみ微少変化 $\delta\boldsymbol{d}_j{}^*$ したとすると

$$\delta\boldsymbol{m}_j{}^*={}^tA^tT\,\delta\boldsymbol{d}_j{}^* \qquad \text{(A-22)}$$

したがって評価関数 P_N の微少変化はつぎのようになる．

$$\delta P_N=2\varphi_j[{}^t\boldsymbol{m}_j{}^*R^tA^tT+{}^t\boldsymbol{d}_j{}^*Q]\delta\boldsymbol{d}_j{}^* \qquad \text{(A-23)}$$

$\delta\boldsymbol{d}_j{}^*$ は任意だから最適受信行列となるための条件は［ ］内が0となることであり，

つぎの最適受信行列条件が導かれる．

$$D(Q+TAR^tA^tT)=R^tA^tT \qquad \text{(57)}$$

6．送信行列の最適化 II

最適受信行列条件（57）を満たしながら送信行列を微少変化させその時の評価関数の変化を調べる．送信行列の第 i 列のみが微少変化したとすると式（A-23）よりつぎのような $\delta\boldsymbol{a}_i$ と $\delta\boldsymbol{d}_j{}^*$ との関係式が得られる．

$$(TAR\boldsymbol{e}_i{}^t\boldsymbol{d}_j{}^*T+{}^t\boldsymbol{e}_iR\boldsymbol{m}_j{}^*T)\delta\boldsymbol{a}_i$$
$$+(TAR^tA^tT+Q)\delta\boldsymbol{d}_j{}^*=0 \qquad \text{(A-24)}$$

一方未定係数 λ を用いて

$$L=P_N+\lambda\cdot P_S \qquad \text{(A-25)}$$

を作りこの微少変化を調べるとつぎの式が得られる．

$$\lambda^t\boldsymbol{\rho}_i{}^tA+\sum_{j=1}^{k}\varphi_j{}^t\boldsymbol{m}_j{}^*\boldsymbol{\rho}_i{}^t\boldsymbol{d}_j{}^*T=\sum_{j=1}^{k}\varphi_j({}^t\boldsymbol{m}_j{}^*R^tA^tT$$
$$+{}^t\boldsymbol{d}_j{}^*Q)B(TA\,\boldsymbol{\rho}_i{}^t\boldsymbol{d}_j{}^*T+{}^t\boldsymbol{\rho}_i\boldsymbol{m}_j{}^*T) \qquad \text{(A-26)}$$

ただし　$B=(Q+TAR^tA^tT)^{-1}$

式中 j に関する種々の和は行列として置き換えることができ式（A-26）はつぎのような行列方程式となる．

$$[{}^tT^tD\Phi M-({}^tT^tD\Phi MR^tA^tTBTA$$
$$+{}^tT^tBTAR^tM\Phi M+{}^tT^tD\Phi DQBTA$$
$$+{}^tT^tBQ^tD\Phi M)+\lambda A]R=0 \qquad \text{(A-27)}$$

$\det R\fallingdotseq 0$ を用いると上式の［ ］内は0となる．ここで B, M に元の定義を代入し整理することによって最適送信行列の条件式が得られる．

$$\lambda A+{}^tT^tD\Phi DTA={}^tT^tD\Phi \qquad \text{(58)}$$

（昭和 44 年 6 月 20 日受付）