2263 最適受信方式の信号対雑音比

田中 英彦 （東京大学工学部）

1．まえがき

一般のアナログ変調に対する最適受信方式は，従来までにその形が種々の人々により求められているが，解析はその困難さのためにほとんど為されていない．通信の限界を定める一歩として，一般のアナログ変調方式に対する最適受信方式をSNRの高い所で近似的に解きSNRを求めた．

2．本文

今ガウシアン信号 $a(t)$ で変調された送信波を $m(t)=\phi(a)\cdot\sin[\omega_c t+\varphi(a)]$ で表わす時，最大事後確率という意味での最適復調方式は次の様に表わされる．一般にこの復調方式は実

$$a^*(u)=\int_{t-T}^{t}R_a(u,v)\cdot\left[\frac{\partial m}{\partial a}\right]_{a^*}\cdot g(v)\,dv\ ,\qquad r(u)-m^*(u)=\int_{t-T}^{t}R_n(u,v)\,g(v)\,dv \tag{1}$$

現不可能であるが，$u=t$ に於ける値だけは実現可能である．上式に於いてホワイトガウス雑音とSNRの大なることを仮定すれば，実現可能な受信方式では，$T\to\infty$，$P^2(a)=\phi'^2(a)+\phi^2(a)\cdot\varphi'^2(a)$ として次の様になり，更に信号をCR形（この場合は一段形）と仮定すれば，

$$a^*(t)=\frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{t}R_a(t,\tau)\cdot\left[P^2(a)\cdot\{a(\tau)-a^*(\tau)\}+n_1(\tau)\cdot\phi'(a)-n_2(\tau)\phi(a)\varphi'(a)\right]d\tau \tag{2}$$

この式は微分方程式に帰着でき解くことができる．

$$a^*(t)-a(t)=\int_{-\infty}^{t}Q(\tau)\cdot\exp\left[-\omega_a(t-\tau)-\int_{\tau}^{t}\frac{S_a}{N_0}P^2\{a(u)\}\cdot du\right]d\tau \tag{3}$$

$$Q(\tau)=S_a/N_0\cdot\left[n_1(\tau)\cdot\phi'(a)-n_2(\tau)\cdot\phi(a)\cdot\varphi'(a)\right]-a'(\tau)-\omega_a\cdot a(\tau) \tag{4}$$

ここで $P^2(a)$ に積分の平均効果を考慮すると容易に平均雑音電力 P_N を求めることができる

$$P_N=\int_{-f_n}^{f_n}W_n(\omega)\,df\int_{-\infty}^{u}dv_1\int_{-\infty}^{u}dv_2\int_{-\infty}^{\infty}da_1\int_{-\infty}^{\infty}da_2\left[\phi'(a_1)\cdot\phi'(a_2)+\phi(a_1)\cdot\phi(a_2)\cdot\varphi'(a_1)\cdot\varphi'(a_2)\right]$$
$$\times\frac{S_a}{2\pi N_0^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\omega_a(\eta+1)(2u-v_1-v_2)+j\omega(v_1-v_2)-\frac{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\rho}{2S_a(1-\rho^2)}\right] \tag{5}$$

但し $R_a(v_1,v_2)=S_a\rho(v_1-v_2)$　　$\overline{P^2}=\int_{-\infty}^{\infty}P^2(a)\frac{1}{\sqrt{2\pi S_a}}\exp\left(-\frac{a^2}{2S_a}\right)da$

$\eta=S_a\overline{P^2}/N_0\omega_a$

$\phi(a)$ と $\varphi(a)$ を a のベキで表わし上式を解くと，SNRが大なることを利用し，$|z|\ll 1$ では $\tan^{-1}z\doteqdot z$ となることを用いれば，η の一次近似で $P_N\doteqdot N_0 f_n/\overline{P^2}$ となる．一方送信波 $m(t)$ の帯域 B_m は平均二乗帯域で表わせば $2\pi B_a=\omega_a$ として $B_m^2=S_a/S_m\cdot\overline{P^2}B_a^2$ であり，$(S/N)_{in}=S_m/N_0 f_n$ だから出力のSNRは，$f_n=B_m$ として

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}\doteqdot\frac{S_a\overline{P^2}}{N_0 f_n}=\left(\frac{B_m}{B_a}\right)^2\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_{in} \tag{6}$$

すなわち出力のSNRは信号の占有帯域のみで定まる．故に占有帯域が定まっている時，変調方式を工夫して良い通信方式を得ようとすることは，この近似の高次の項を改善しようとすることに他ならない．信号がCR2段形位までは，受信方式は解析的に容易に解き得てやはりその場合の出力SNRも帯域の2乗に比例することがかなり一般的に言える．これらの解は，あくまでガウシアン信号の仮定が入っているので，そうでない場合は必ずしも成立しないが，多重信号になるとガウシアンに近ずくので成立するものと思われる．

3．謝辞

有益な御討論をいただいた指導教官の本学尾佐竹徇教授に感謝する．