

24  
通信方式 研究会資料  
資料番号 CS 70-6(1970-04)

# 最適伝送路符号化方式

—アナログ変調と混成PCM—

尾佐竹 徇・田中英彦

(東京大学・工学部)

1970年4月24日

(於 北陸)

社団法人 電子通信学会

最適伝送路符号化方式 — アナログ変調と混成PCM —  
Fundamental theory of channel encoding

尾佐竹 徇・田中英彦  
Tonau Osatake · Hidehiko Tanaka

東京大学工学部  
Faculty of Engineering, University of Tokyo

## 1. ま え が き

情報伝送に於いて伝送路雑音に対処する為には情報を適当な伝送路信号に変換する伝送路符号化が必要である。これについて従来迄に種々の冗長性符号や変調方式が提案され、個別的なそれぞれの特性に関して多くの研究が為されている。しかし伝送路雑音に対して元々如何に対処すべきか、又伝送路符号化とはどういうことをおこなうべきかの観点から考察をおこなった論文は少ない。更にアナログ情報伝送とデジタル情報伝送との中間領域に関する検討は為されておらず、この間を結ぶ最適な変調方式乃至は最適符号化方式等は見出されていない。本文はこれらの点に鑑み、1つのアナログスカラー情報を伝送する場合に受信側で最も正しく復元する為に必要な伝送路符号化の条件を考察し、その点から最適符号化方式を導びこうとしたものである。最適性の評価には種々考えられるが、ここでは出力のスカラー値と送信情報スカラー値との平均2乗誤差を最小とすることにした。

## 2. 最適受信方式と変換関数

### 2.1 スカラーの最適受信方式

確率密度関数  $p(x)$  を持つ1つのアナログスカラー  $x$  を伝送することを考える。図1のように、 $x$  で定まる1つの時間波形  $s(t, x)$

( $0 \leq t \leq T$ ) を作りこれを送信信号とする。伝送路は理想的とし平均 0 の白色ガウス雑音 ( $N_0$  watt/Hz : 片側) が加わるものとする。この時 MAP 推定による最適受信器は、出力スカラーを  $x^*$  として次のように与えられる。<sup>(1)</sup>

$$\frac{p'(x^*)}{p(x^*)} + \frac{2}{N_0} \int_0^T [r(t) - s(t, x^*)] \left\{ \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} \right\}_{x=x^*} dt = 0 \quad (2-1)$$

さて今送信波  $s(t, x)$  を区間  $[0, T]$  で直交する関数系  $\{U_i(t)\}$  で展開して変数分離形に直せば

$$s(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(x) \cdot U_i(t) \quad (2-2)$$

但し

$$\int_0^T U_i(t) \cdot U_j(t) dt = \delta_{ij} (= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}) \quad (2-3)$$

上式を式 2-1 に代入し受信 SNR は充分高いことを仮定すると、出力スカラーの 2 乗平均雑音  $N_{0UT}$  はほぼ次のように与えられる。

$$N_{0UT} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2(x) \right]^{-1} p(x) dx \quad (2-4)$$

## 2.2 最適変換関数と制約条件

伝送で普通問題となるのは送信エネルギー (連続波伝送の場合は電力) と伝送占有帯域とである。まず平均送信エネルギー  $E$  は式 2-2 より

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2(x) \right] \cdot p(x) dx \quad (2-5)$$

として与えられるが、帯域はその定義から考え直さねばならない。所で今は時間間隔〔0,  $T$ 〕内での伝送を問題にしているので、その定義としては関数系  $\{X_i(x); i=1, \dots, m\}$  の項数  $m$  により定めるのが妥当だと思われる。すなわち時間間隔〔0,  $T$ 〕内で独立なスカラー ( $Y_i = X_i(x)$ ) を幾つ伝送しているかにより占有帯域を間接的に定めるのである。実際上の伝送スペクトルを定めるのはこの  $m$  と時間関数系  $\{U_i\}$  とであるが、時間関数系の選び方は伝送路符号化とは直接関係しない。しかし種々の直交関数系の中でも最も占有帯域が狭くなるのは正弦、余弦関数系に近いことが知られているので、送信波合成には構成も容易なこの関数系を用いればよい。

上に与えた制約条件のもと、平均出力雑音電力を最小とするのがここで言う最適変換関数系である。一般的に求めることは難かしいので  $m$  の小さな場合について例を示そう。

①  $m=1$  の場合

特に  $x$  が区間  $[-x_m, x_m]$  に於いて一様分布の場合を考えると、変分を用いて結局最適変換関数  $X_1(x)$  は次のように逆関数の形で求められる。

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x_m} = \frac{X_1}{2\sqrt{E}} \cdot \left(1 - \frac{X_1^2}{4E}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{X_1}{2\sqrt{E}}\right) \quad (2-6)$$

この形は図2のようになる。又この場合の出力SNRは、

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{2E}{N_0} \quad (2-7)$$

となり、通常の直線PAMに比して  $\pi^2/9$  だけの改善が見られる。

②  $m = 1$ , 且つ尖頭電力条件

平均電力条件の代わりに, 送信信号のピーク値のみを抑えた場合, 密度関数  $p(x)$  を正負で対称とすれば, 最適変換関数は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X_1(x) &= Y_1 \int_0^x p^{1/3}(v) dv / \int_0^{x_m} p^{1/3}(v) dv \\ Y_1 &= \text{送信信号のピーク値} \end{aligned} \right\} (2-8)$$

これはいわゆる最適コンパンダに相当し, 例えば  $p(x)$  を一様分布とすればこの関数は直線になる (図 2)。

③  $m = 2$ 

2 チャネル伝送について  $p(x)$  を一様分布とし, 且つ

$$X_1'^2(x) + X_2'^2(x) = \text{const.} \quad (2-9)$$

が  $x$  にかかわらず一定の場合を考える。これは出力雑音電力が  $x$  によらないことを示している。この時の最適関数系は次のように解けるが,

$$X_1(x) = \sqrt{E} \cdot \sin cx, \quad X_2(x) = \sqrt{E} \cdot \cos cx \quad (2-10)$$

これは丁度,  $PM$  に相当する ( $c$  は定数)。

## 3. 非線形変換と多価関数

## 3.1 広帯域利得とその条件

変換関数系  $\{X_i\}$  に対する条件式から明らかなように, 送信エネルギーと占有帯域一定のもと出力雑音電力を小さくする為には,  $X_i'^2$  の和一定

のものと  $X_i'^2$  の和を大きくしなければならない。この他に受信側で一意的に復号が可能となる為の条件として、関数系を全体としてみた時それが1つの一価関数でなければならない。変換関数系の次元  $m$  が1の場合、明らかに  $X_1(x)$  はそれ自身一価でなければならず、この最適形は前に与えた通りである。しかし次元数が大きくなるとそう簡単ではない。信号電力が一定で関数の勾配のみを大きくするには関数が多価関数とならねばならず、復号一意性の条件が問題のポイントになるが2通りの考え方があるであろう。1つは  $m$  本の受信値から多価領域の1つを決定し然る後にその領域内での細かい  $x$  の位置を定めるという行方であり、他は  $m$  本の受信値に順位を定めておいて、始めの信号でまず大ざっぱな位置を定め次の信号ではその近傍でのより詳しい位置を定めるという方法である。

### 3.2 信号の有無による領域決定方式

前節で述べた2通りの行方のうち前者の方法を考える。今  $p(x)$  は一様分布とし広帯域利得の特性を考える為にまず  $m=2$  の場合について考察する。最適条件は逆に  $X_i'^2$  の和を一定としておけば、 $X_i^2$  の和を最小化することともみなせる。簡単の為関数をすべて折線で構成してみよう。この時、送信エネルギーを小さくするには図3のようにすればよいであろう。このように  $x$  の区間を2等分し、 $x$  の存在する場所により  $X_1$  を送るか  $X_2$  を送るか他方を0としておけば、関数が1つしかない場合(一点破線)に比して勾配の2乗和は等しいが送信電力は小さくすることができる。更に全体としての一価性が満されている。上図では区間  $[-x_m, x_m]$  を2等分して示したが何等分しても同じであり、こ

の場合はそれ以上の利得を期待できない。以上の考えを拡張すれば変換関数の次元が  $m$  の場合は図 4 のように区間を  $m$  分割し、各区間にそれぞれ異なるチャネル ( $i$ ) の変換関数 ( $X_i$ ) を当てはめてその内部では常に一価関数となるようにすれば、全体として一価であるから復号は可能で且つ送信エネルギーは小さくなる。この場合の出力 SNR を求めると、送信エネルギーが  $m^2$  倍になった一価関数と等価であって次のようになる。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = m^2 \frac{2E}{N_0} \quad (3-1)$$

### 3.3 チャネルの組み合わせとスレシヨールド

上に与えた方式を拡張することができる。送信エネルギーを 1 チャネルのみでなく幾チャネルかの組み合わせで伝送すれば等価的な領域数は組み合わせで増加する。例えば  $m$  ケのうちから  $k$  チャネルの組み合わせで伝送しようとする、その 1 チャネル当りの送信エネルギーは  $1/k$  になるが等価領域数  $m_{eq}$  は  $m^k$  となる。更にエネルギーを分割するチャネル数を一定とせずそれを更に自由にして任意の数とすることもできる。この方式による符号化は、従って図 5 の様になる。即ち通常 of 自然 2 進により送信スカラを符号化してそれを  $(a_1 a_2 \cdots a_m)$  と置く ( $a_i = 1 \text{ or } 0$ )。このうち 1 となったチャネルからは直交時間波形を出し、量子化誤差に相当する信号で PAM して送信信号を作る。又復号はまず直交関数で相関検出してあるスレシヨールド以上のチャネルを決定し、それにより多価領域の 1 つを決定する。又信号存在の検出されたチャネルの信号を加算し、その出力でその領域内のより詳しい位置を決定すれば最終出力が得られる。等価組み合わせ数と 1 チャネル当りのエネルギー減少を考慮す

ればこの場合の出力SNRは次のようになる。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{2(2^m - 1)^2}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \cdot \frac{2E}{N_0} \quad (3-2)$$

○ スレッシュホールド

実際上はPAMパルスが両極性の為、振巾の0となる所が存在しここでは復号があいまいになる。従って例えば振巾が0近くの所では直線を折線とし、 $-\epsilon \sim \epsilon$ の間の値は取らないように定めておけばよい。この時、変位 $\epsilon$ をどの程度に取るかは伝送路のSNRによって定められる。

以上与えた方式は関数項の数 $m$ の指数的な特性改善を持っている。 $m$ は又伝送路の占有帯域にも比例するので、従って本方式は帯域の指数的な広帯域利得を持っていると言うことができる。

#### 4. 混成PCM方式

##### 4.1 変換関数の階層的構成

変換関数に何らかの形で多価性を導入する第2の方法は、 $m$ ケの変換関数を用いて順々に送信スカラーの値を詳しく定めてゆく方法である。関数系の内には必ず1つ一価関数を入れておく。それによってまず大体の位置を知り次の関数でより詳しい位置を定め、又次の関数で更にスカラーの位置を明確にするというやり方である。送信スカラーの分布を一様分布とした時、このような関数系に対し次のことを仮定してもよいであろう。関数系 $\{X_i; i=1, \dots, m\}$ は、

- ① 価数の小さい順に並べたものである。
- ② 同じ価数を持つ関数は1つしか含まれない。
- ③ 各関数は正負対称な周期関数である。



④ 各関数の繰り返されるパターン関数は単調非減少である。

⑤ 各関数の価数は1つ前の関数の価数の整数倍である。

さて送信スカラー  $x$  が定まった時関数形によって定まる  $m$  個のスカラーを伝送し、受信側では  $m$  個の受信スカラーを得る。これから1つのスカラーを復元する訳であるが各チャネル受信信号の働きは2つに分けられる。1つは次のチャネルの一価領域を決定することで、もう1つは情報信号  $x$  の位置を大まかに定めることである。最終的な位置決定に対して  $m$  個のチャネル各々の関与する重み…各受信信号の働き2つのうち後者だけに着目した…を  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) とし、各受信信号が次のチャネルの一価領域決定を誤る確率を  $p_i$ 、又誤った時それが出力に雑音として及ぼす影響を  $Q_i$  で表わせば、最終出力の平均誤差電力  $P_N$  はほぼ、

$$P_N = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \overline{e_i'}^2 + \sum_{i=1}^m p_i Q_i \quad (4-1)$$

但し、 $e_i'$  は領域判定誤りがない時の、 $i$  チャネル出力誤差である。関数  $X_i$  の一価領域を  $n_i$  個に分割したのが次の関数  $X_{i+1}$  の一価領域だとすると、最適符号化とは送信エネルギー条件のもと（帯域は  $m$  で定まる）。分割数  $\{n_i\}$  と、関数系  $\{X_i\}$  を構成する  $m$  個のパターン一価関数形をうまく構成して平均誤差電力  $P_N$  を最小化するものである。

#### 4.2 最適関数の形

まず各関数の形を考える。今関数  $X_i$  の1つの一価領域を考えた時、この領域内に存在する  $X_{i+1}$  の  $n_i$  個の一価領域はいずれも等価であり、従って送信スカラー信号  $x$  がどの領域内にあっても雑音としては同じ性質を持たすのが妥当であろう。図6中、区間  $[-A_i, A_i]$  が  $X_i$  の1

つの一価領域であり縦軸の  $[-B_{i0}, B_{i0}]$  が関数の存在する範囲である。図では  $X_{i+1}$  の一価領域が3つの場合を示しているが、上述のことから関数  $X_i$  は1つの基本関数をつなぎ合わせて3回繰り返したものになる。勿論この3つの領域のうち、端の2つと真中の1つとでは性質が異なるがその影響は余り大きくないと考えられるので無視する。今送信スカラー信号  $x$  が区間  $[-A_{i+1}, A_{i+1}]$  内にあったとし（一般性を失わない）基本関数を  $h_i(x)$  とすれば、伝送路雑音を  $n_i$  として、 $y_i$  から  $x$  の位置を決定する場合の誤差  $e_i'$  とその電力はほぼ次のようになる。

$$e_i' = n_i / h_i'(x) \quad (4-2)$$

$$\frac{1}{e_i'^2} = \frac{N_0}{2A_{i+1}} \int_0^{A_{i+1}} \frac{dx}{h_i'^2(x)} \quad (4-3)$$

一方、 $X_{i+1}$  の一価領域決定の誤り率  $p_i$  は次のように与えられる。

$$p_i = \frac{1}{2A_{i+1}} \int_0^{A_{i+1}} \left[ \operatorname{erfc} \left\{ \frac{B_i - h_i(x)}{\sqrt{N_0}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{B_i + h_i(x)}{\sqrt{N_0}} \right\} \right] dx \quad (4-4)$$

又誤判定の等価雑音電力項  $Q_i$  は、領域誤判定による誤差の評価重み  $\rho_{i0}$  を用いて次のように表わされる。

$$Q_i = 4\rho_{i0} \cdot A_{i+1}^2 \cdot (1 - 1/n_i) \quad (4-5)$$

従って、境界条件

$$H_i(0) = 0, \quad H_i(1) \leq 1 \quad (4-6)$$

のもと、次の $P_N$ を変分して最小化すれば関数形 $H_i(\theta)$ の最適形が求まる。

$$P_N = \sum_{i=1}^m Q_i, L_i \quad (4-7)$$

$$L_i = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \operatorname{erfc}\{S_i(1-H_i(\theta))\} + \operatorname{erfc}\{S_i(1+H_i(\theta))\} + \frac{c_i}{H_i'^2(\theta)} \right] d\theta \quad (4-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し, } x &= A_{i+1} \cdot \theta, \quad h_i(x) = B_i \cdot H_i(\theta) \\ S_i &= B_i / \sqrt{N_0}, \quad c_i = N_0 \alpha_i^2 A_{i+1}^2 / Q_i B_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

即ち、最適解は次のように逆関数として表わされる。

$$\theta = K_i \cdot \int_0^{H_i} \left[ C - \operatorname{erfc}\{S_i(1-H)\} - \operatorname{erfc}\{S_i(1+H)\} \right]^{\frac{1}{2}} dH \quad (4-10)$$

但し、 $K_i = 2\sqrt{D_{i0}} \cdot S_i / \sqrt{3} c_i$ 、 $C$ は積分定数

積分定数は境界条件から定められるが、 $K_i, S_i$ の大きさによって2通りの場合が生じる。1つは $H(1)=1$ となりうる場合で、他は $H(1)<1$ の場合であって後者は $\theta=1$ で不連続になる。これらの計算結果を図7に示す。 $S_i$ は基本関数のSNRに相当し、 $\alpha_i$ は各受信信号のアナログ機能の重みである。従って上図から明らかなように $\alpha_i$ が小さくなる程…即ち始めの関数程不連続性が著るしい。又最終関数に関しては領域判定誤りに相当する項が無いので連続関数であり、その最適形は前述の

式(2-6)である。一方  $\alpha_i$  の大きさについて考えると通常  $\alpha_m \approx 1$  で他の  $\alpha_i$  はすべて小さい。よって最終関数以外の各関数の基本関数の最適な形は、図7からも明らかなように勾配の小さな直線にほぼ近く、近似的に

$$H_i(\theta) = 0 \quad -1 < \theta < 1 \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (4-11)$$

と置くことが考えられる。これは即ち  $X_i$  を階段関数とする方式である。

#### 4.3 混成PCM方式

前節で与えた方式は又次のようにも表現できよう。すなわちこれは  $m$  デジットから成る方式で、各デジットのレベル数  $n_i$  とエネルギー  $E_i$  とはデジット毎に異なり、又最終デジットのみは最適コンパンダ形が図2で与えられるアナログデジットである。以後これを混成PCMと称することになる。さて、方式の最適化はエネルギー配分とレベル数の与え方とについておこなわねばならない。前の式(4-7)等を用いて平均出力誤差電力  $P_N$  と送信全エネルギー  $E$  とを表わせれば次のようになる。

$$\frac{P_N}{\alpha_m^2} = \frac{6}{\pi^2 (n_1 \cdots n_{m-1})^2 S_m^2} + \sum_{i=1}^m \frac{4\rho_{i0}}{(n_1 \cdots n_i)^2} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \operatorname{erfc} S_i \quad (4-12)$$

$$\frac{2E}{N_0} = \frac{1}{2} S_m^2 + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{m-1} (n_i^2 - 1) S_i^2 \quad (4-13)$$

従って、ラグランジュの未定定数  $\lambda$  を用いて、項

$$G = \frac{P_N}{\alpha_m^2} + \lambda \cdot \frac{2E}{N_0} \quad (4-14)$$

を作り,  $S_i, n_i$  で偏微分すればこれらの間の種々の条件式が得られる。しかしこれらの関係式は非線形の連立方程式で, 解析的には解き難い。

◦ 近似解 (S N R の高い場合)

通常は  $S_i^2 \gg 1$  であることを利用すれば近似的に解くことができる。それによると, まず各ディジットのエネルギーはほぼ均一となり, 更に  $S_i^2$  の平均的な値を  $S_0^2$  とすれば出力 S N R はほぼ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{out} &\doteq K_0 \cdot \left(\frac{3E}{mN_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{3E}{mN_0}\right)^{m-1} \\ K_0 &\doteq 2\pi^2 \left[27 \left(1 + \frac{m-1}{S_0^2}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4-15)$$

◦ 数値計算例 (厳密解)

次に解析の比較的容易な一例, 各デジタルディジットのレベル数がすべて等しい場合の数値計算例を示しておく。図 8 は最適レベル数, 図 9 はその時の出力 S N R である。比較上, 普通の多進方式でレベル数の最適な 2 例を・で示してあるが, いずれも混成方式の方が 5dB, 8.5dB 程勝れており, これはアナログディジットの混成とエネルギーの最適配分とから得られるシステム利得である。更に図 10 は, 2 例について各ディジットへの最適エネルギー配分を相対的に示したものである。

## 5. む す び

情報を最も正しく伝送する為にはどのような符号化方式が必要であるかを考察し, いわゆる符号化利得は送信信号の変換関数の多価性に由来することに着目してその多価関数系構成を論じた。その結果 1 つのスカラ-を誤差最小で伝送する方式には混成 P C M に近いことが導かれた。こ

れは $m$ ディジットからなる方式で、最終1ディジットを除いた他は各ディジット毎にレベル数や付与エネルギーの異なる多進ディジットである。又ディジットの数は伝送路帯域から定められる。本文ではこの方式の解析とともに幾つかの数値計算結果を示した。

文 献

- (1) H.L.Van Trees, "Detection, Estimation, and Modulation Theory", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.
- (2) 尾佐竹, 田中 "最適アナログ変調の一方式", 信学誌文誌B, Vol.51-B, No.2, p.49 (昭43-02)
- (3) 尾佐竹, 田中, 三宅, "多価変調方式" 昭42全大, 20.
- (4) 尾佐竹, 田中, "メモリレス非線形変調の一方式" 昭43連大, 2206.

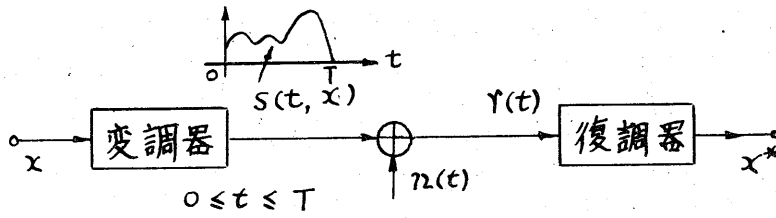


図1 スカラー  $x$  の伝送

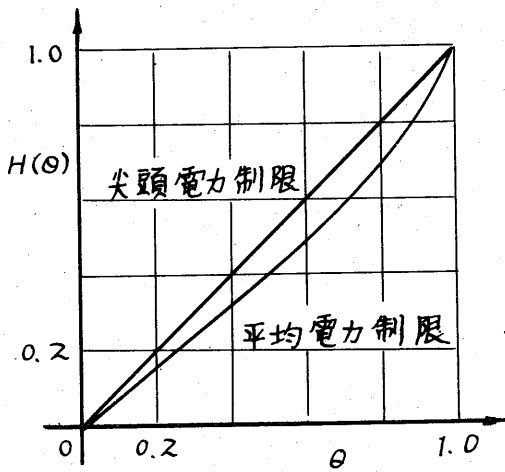


図2 最適伸張特性

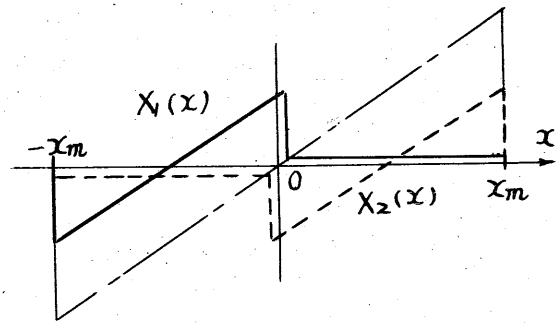


図3 次元  $m=2$  の変換関数

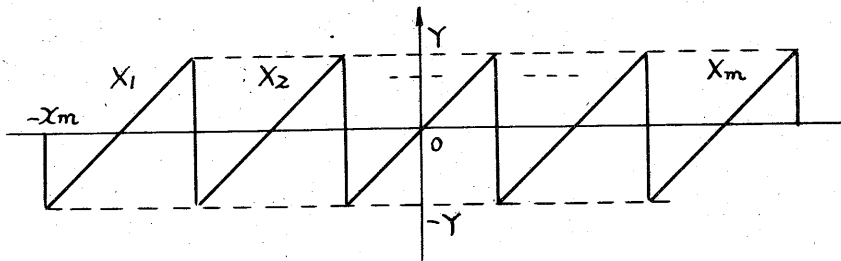


図4 次元  $m$  での変換関数

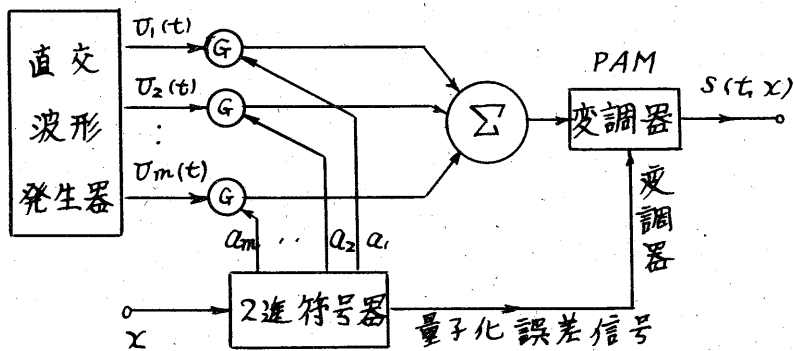


図5 組み合わせによるスカラー伝送方式

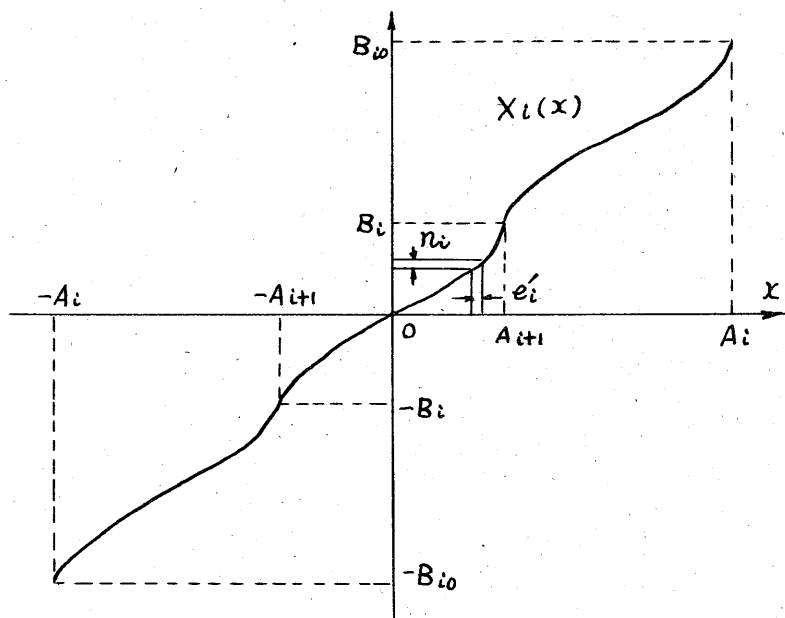


図6 関数  $X_i(x)$  のパターン関数

1998 7-50



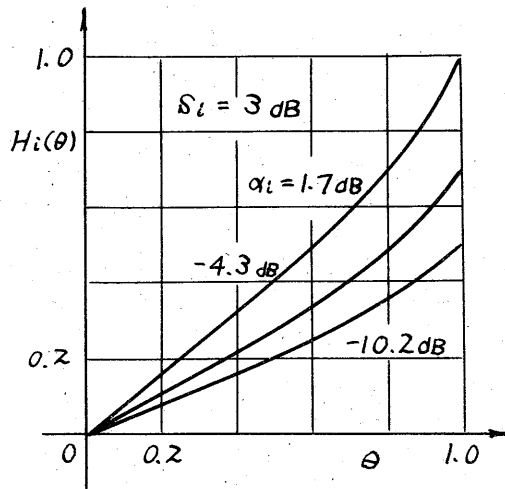


図7 最適変換関数形例

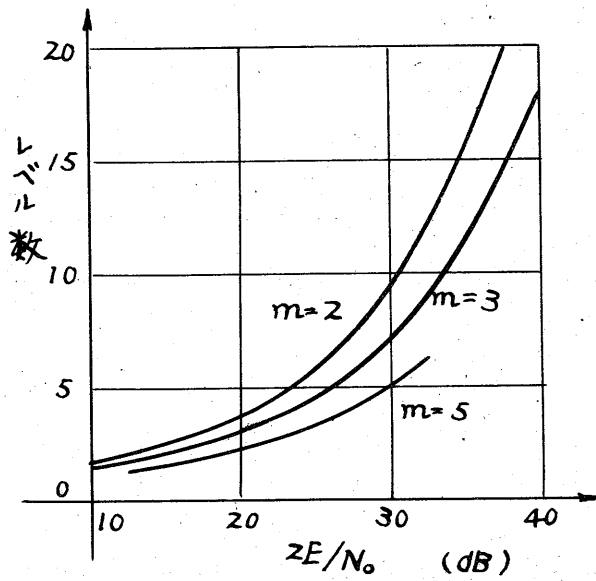


図8 最適等進方式の最適レベル数

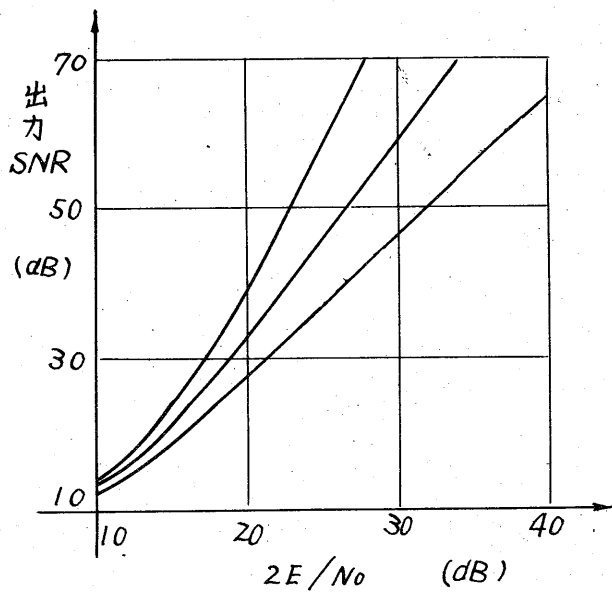


図9 最適等進方式の出力SNR

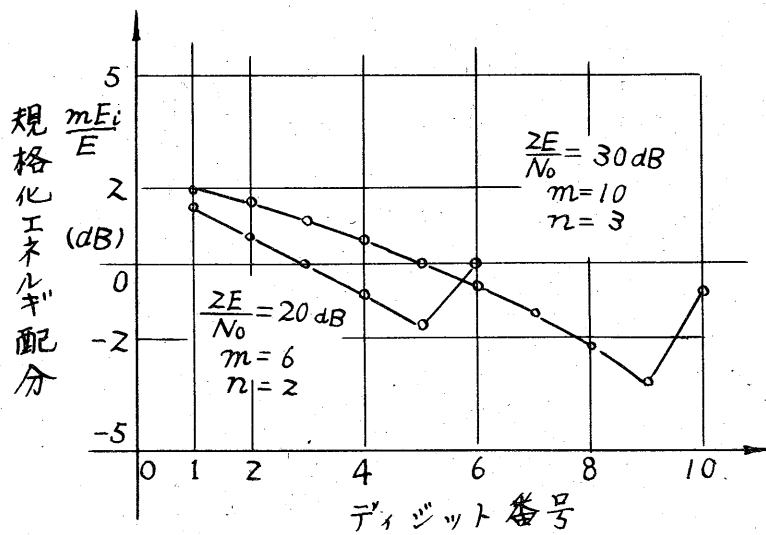


図10 最適等進方式の各ディジットへのエネルギー配分