交　　換研究会資料
資料番号 SE 67-27 (1967-12)

分散形網呼損率の一般式

尾佐竹　　徇
田　中　英　彦
(東京大学・工学部)

1967年12月21日

社団法人 電子通信学会

分散形網呼損率の一般式

尾佐竹　徇・田 中 英 彦
（東京大学工学部）

はじめに

現在急速な発達を遂げつつある通信技術や素子技術は，将来の通信形態を考える時極めて自由な発想を可能にしてくれるものである。例えばＰＣＭや遠隔制御技術並びにＩＣやＬＳＩ等の高密度素子がそうであるが，交換網１つを取ってみてもその網形態や通信交換方式等にかなり興味ある方式が考えられる。従来迄の電話交換網では星形を基幹として網形を適当に配した形態のものであるが，別な網形態として格子形網，蜂の巣形網等の分散形網も考えられ，その有意性については前に御報告した。(1)

ここでは，格子形網，蜂の巣形網等の分散形網に於いて網を構成するすべてのリンクの閉塞状況が解っている場合に任意の発着両局間の呼損率を求める一般式を御紹介する。リンク占有は相互に独立であると仮定しているのでこの問題は言い換えれば，「分散形網に於いて網の各リンクが，すべて等しく且つ独立な閉塞確率を有する場合に，ある条件のもとで網内の任意の２局を結ぶルートの存在しない確率を求めること」である。この計算式は，単に通信網呼損率の算出だけでなく他にも種々の応用が考えられるものである。解析の終りにはこれらの数値計算を実行した結果も幾つかあげておいた。これらの解析が何らかの御参考になれば幸いである。

1. 問題の設定

図1のようなルート網があったとする。交点は交換局を表わし，それを結ぶ線を単位ルートと称する。網を構成する単位ルートが，ある一定

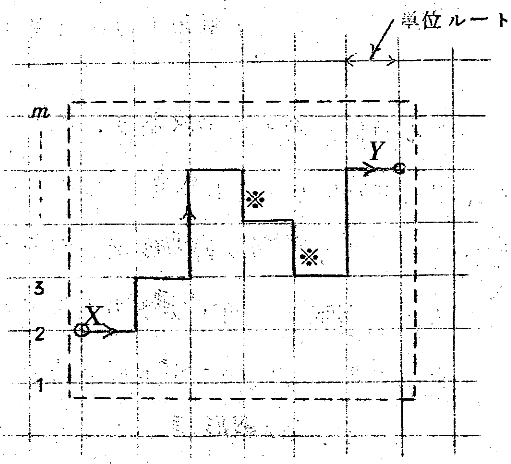

図1　格子形網のルート選択方式

の割合で閉塞する場合任意の2局を結ぶルートが存在する確率，乃至は存在しない確率の一般式を求める。但し単位ルートの閉塞確率はすべて同一であり又閉塞は相互に独立であるとする。網は次の2種を対象とする。

① 格子形網 (grid type network)

② 蜂の巣形網 (honey comb type network)

又ルート選択には少し条件を付けて，図1のような網の場合，縦横方向2種のルートのうち，片側 (図では横側) の方向のルートに対しては後戻りを許さず，もう一方のルート (縦側) については，

① 後戻りを許す場合

② 後戻りを許さぬ場合

の2通り考えることにする。但し「後戻り」とは目的とする局から，中

継ルートの数(単位ルート数)でいって増えるようなルートを取ることを意味し,図1中※を付けたルートがその後戻りルートである。又網内で動き得る範囲を限定しルート選択の収束性を持たすため,後戻り可能の場合でも後戻り可方向のリンク数には制限を設けておくものとする。従ってルート選択は,図1のように破線で囲まれる範囲内のみで行う。図1では縦方向単位ルート数にmという制限が置かれている。

通信網ではリンク閉塞率がすべて同じ場合に任意の2局を結ぶ呼びの呼損率を近似的に求めることに相当し,呼びのリンク占有が相互に独立と仮定した場合の近似式である。勿論この場合,網内のどこかに記憶装置があって網を構成するすべてのリンク閉塞状況を記憶しており,1つの呼びが生じた時は中央の記憶装置に問い合わせ中央では上述のルート選択条件のもと発着両局を結ぶルートを構成し得るかどうか調べた後もし可能ならば必要な各リンクにルート構成指令を出すというモデルを想定している。ここで与える計算式は他にも種々の面白い応用が考えられるものであり,又適用される網の種類は上にあげた2種に限られる訳ではなく,他の網への拡張は可能であるし,ルート選択条件についても同様である。

用いる記号を次のように定義しておく。都合上,後戻りができる場合は図1のようにそれを縦側のルートであるとする。

b 、単位ルートの閉塞(切れる)確率

c 単位ルートの空き(つながっている)確率,$c = 1 - b$

$\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_m)$

ある縦の1列に並ぶmケの交差点(中継局)の指標

$\mathbb{j} = (j_1, j_2, \cdots, j_m)$

上のmケの交差点から右横に延びる横方向単位ルートの空き状態

$\mathbb{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_{m-1})$

上のmケの交叉点を結ぶ縦の単位ルートの空き状態

ベクトル$\mathbb{i}$，$\mathbb{j}$，$\mathbb{l}$の成分は1又は0で表わし，$\mathbb{j}$と$\mathbb{l}$とについては成分が1であればそこの単位ルートが空いていて通れる状態を示し，0であればそれが塞がっている状態を示す。又$\mathbb{i}$は到達できた交叉点を示すものであって，1つの交叉点Xから出発して今着目している縦のmケの交叉点のうちどこどこに到り得ているかを示す。成分が1の交叉点には到達が可能となってそる状態を示し，逆に言えば，成分が1となっている幾つかの交叉点からともに目的点を目指す場合の指標である。以上の記号は，格子，蜂の巣両網に共通のものでこれ以外は必要に応じて定める。

2. 格子形網

2.1 一般解析

図2のようなNxm の格子形網を考え，出発点は第N列のどこかにあり又目的点は第1列のどこかにあるものとする。この時，$N \leq n \leq 1$の任意の第n列に着目して，目的点から逆に第$n-1$列の点に到り得ない確率と第n列の点に到り得ない確率との間の関係を調べ漸化式を作る。

さて第n列の交叉点に関する値を$\mathbb{i}$，$\mathbb{j}$，$\mathbb{l}$で表わすと，mケの交叉点を結ぶ縦の単位ルート$m-1$本の状態S_α，又mケの交叉点から右に出ているm本の単位ルートの状態T_βの生起確率$p(S_\alpha)$，$p(T_\beta)$は次の

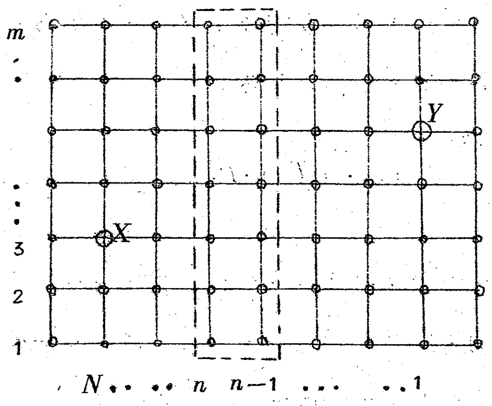

図２　格子形網

ようになる。

$$p(S_\alpha) = \prod_{k=1}^{m-1} (c^{l_k} \cdot b^{1-l_k}) = b^{m-1} \prod_{k=1}^{m-1} \left(\frac{c}{b}\right)^{l_k} \tag{1}$$

$$p(T_\beta) = \prod_{k=1}^{m} c^{j_k} \cdot b^{1-j_k} = b^{m} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{c}{b}\right)^{j_k} \tag{2}$$

この第n列のmケの交叉点がiという状態にある時，iの成分が１となっている点からともに目的点Yを目指してもそこへ至るルートが１つも存在しない確率を$p_n(i)$で表わすと，条件付確率$Q_n(i|S_\alpha)$を用いることによって次のようになる。

$$P_n(i) = \sum_{\alpha=1}^{2^{m-1}} p(S_\alpha) \cdot Q_n(i|S_\alpha) \tag{3}$$

$Q_n(i|S_\alpha)$は，第n列の縦の単位ルート$m-1$本の状態がS_αの時にiの成分が１となっている交叉点のすべてから出発しても目的点に到達できない確率であって，これはT_βを用いて次のように表わされる。

$$Q_n(i|S_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{2^{m}} p(T_\beta) \cdot P_{n-1}(i'') \tag{4}$$

但し，$\boldsymbol{i}''$は$\boldsymbol{i}$とS_αとT_βとにより定まるベクトルである。

従って(3)，(4)式をまとめて次式が得られる。

$$P_n(\boldsymbol{i}) = \sum_{\alpha=1}^{2^{m-1}} \sum_{\beta=1}^{2^m} p(S_\alpha)\cdot p(T_\beta)\cdot P_{n-1}(\boldsymbol{i}'') \tag{5}$$

これはnに関する漸化式であり，あらゆる$\boldsymbol{i}$の値について(5)式を作れば（2^mケ），それらは初期条件$P_0(\boldsymbol{i})$を与えることにより一義的に解くことができる。すなわちこれが求める漸化式である。

次に$\boldsymbol{i}$と$\boldsymbol{i}''$の関係を調べよう。この関係を定めることがすなわちルート選択方式を定めることであって，逆にこれはルート選択法により定まるものである。ここでは1章で述べたルート選択方式しか取り扱わないが，この関係を適当に与えることにより殆んどの網に適用可能である。

2.2 後戻り（縦方向の）を許す場合

第n列の単位ルートの状態がS_αの時$\boldsymbol{i}$という出発点が与えられると，このn列の縦のルートが空いていれば自由に動き回ることによって，到りうる出発点は増すからそれを$\boldsymbol{i}'$とおく。即ち，$\boldsymbol{i}$から出発して第n列内だけを動くことができるとすれば，状態S_αにより到りうる点$\boldsymbol{i}'$は定まる。$\boldsymbol{i}$から$\boldsymbol{i}'$への変換は，$\boldsymbol{i}'$の1成分i_sに着目すると次の様になる。

$$i'_s = i_s + \sum_{r=1}^{s-1} l_{s-r}\cdot l_{s-r+1}\cdots l_{s-1} l_{s-r} + \sum_{r=1}^{m-s} l_s l_{s+1}\cdots l_{s+r-1} i_{s+r} \tag{6}$$

但しサフイクス以外の演算は，AND と OR で行うものとする。

従って，行列A_α を用いて次のように表わされる。

$$i = A_\alpha \cdot i' \tag{7}$$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & l_1 & l_1 l_2 & l_1 l_2 l_3 \cdots & l_1 l_2 \cdots l_{m-1} \\ l_1 & 1 & l_2 & l_2 l_3 & l_2 l_3 \cdots l_{m-1} \\ l_1 l_2 & l_2 & 1 & l_3 & l_3 l_4 \cdots l_{m-1} \\ l_1 l_2 l_3 & l_2 l_3 & l_3 & 1 & l_4 l_5 \cdots l_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 l_2 \cdots l_{m-1} & l_2 l_3 \cdots l_{m-1} & l_3 l_4 \cdots l_{m-1} & l_4 l_5 \cdots l_{m-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

次に横方向のルート状態がT_β の時，第$n-1$列の交叉点の状態i'' の成分i''_s はベクトルjを用いることによって，

$$i''_s = j_s \cdot i'_s \tag{9}$$

と表わされるから，j_s の対角行列J_β を用いてi'' は次のようになる。

$$i'' = J_\beta \cdot i' \tag{10}$$

但しJ_β は

$$J_\beta = \begin{pmatrix} j_1 & & 0 \\ & j_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & j_m \end{pmatrix} \tag{11}$$

(7)式と（10）式とをまとめることにより

$$i'' = J_\beta \cdot A_\alpha i \qquad (12)$$

こうして i と i'' との関係を求めることができた。

2.3 後戻りを許さない場合

前の(6)式に対応するものとして

$$i'_s = i_s + \sum_{r=1}^{s-1} l_{s-r} l_{s-r+1} \cdots l_{s-1} i_{s-r} \qquad (13)$$

が得られるから，A_α に対応する行列 B_α としては，A_α の対角線より上半分を除いたもので表わされる。

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ l_1 & 1 & & & \\ l_1 l_2 & l_2 & 1 & & \\ l_1 l_2 l_3 & l_2 l_3 & l_3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ l_1 l_2 \ldots l_{m-1} & l_2 l_3 \cdots l_{m-1} & l_3 l_4 \cdots l_{m-1} & l_4 l_5 \cdots l_{m-1} \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

よってこの場合の i'' は次のように与えられる。

$$i'' = J_\beta B_\alpha i \qquad (15)$$

2. 4　初期条件の設定と数値解

上に求めた漸化式に適当な初期条件を入れると任意の出発点と目的点の組み合わせに対して結ぶルートが存在しない確率を求めることができる。一例として図２のようにYへ向う場合を考えると，この場合は$m=7$だから次のようになる。但し次式中i_kとあるのは，１と０の両方について成立つということである。即ち初期条件として

(1)　縦方向ルート後戻り可能の場合

$$P_1(i_1, i_2, i_3, i_4, 1, i_6, i_7) = 0 \tag{16}$$

$$P_1(i_1, i_2, i_3, 1, 0, 1, i_7) = b^2 \tag{17}$$

$$P_1(i_1, i_2, i_3, 1, 0, 0, 1) = b(1-c^2) \tag{18}$$

$$P_1(i_1, i_2, i_3, 1, 0, 0, 0) = b \tag{19}$$

$$P_1(i_1, i_2, 1, 0, 0, 0, 0) = 1-c^2 \tag{20}$$

$$P_1(i_1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = 1-c^3 \tag{21}$$

$$P_1(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 1-c^4 \tag{22}$$

$$P_1(i_1, i_2, 1, 0, 0, 1, i_7) = b(1-c^2) \tag{23}$$

$$P_1(i_1, 1, 0, 0, 0, 1, i_7) = b(1-c^3) \tag{24}$$

$$P_1(1, 0, 0, 0, 0, 1, i_7) = b(1-c^4) \tag{25}$$

$$P_1(i_1, i_2, 1, 0, 0, 0, 1) = (1-c^2)^2 \quad (26)$$

$$P_1(i_1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) = (1-c^2)(1-c^3) \quad (27)$$

$$P_1(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = (1-c^2)(1-c^4) \quad (28)$$

$$P_1(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = 1-c^2 \quad (29)$$

$$P_1(0, 0, 0, 0, 0, 1, i_7) = b \quad (30)$$

$$P_1(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 1 \quad (31)$$

(2)　後戻り不可能の場合（縦上方向の）

$$P_1(i_1, i_2, i_3, i_4, 1, i_6, i_7) = 0 \quad (32)$$

$$P_1(i_1, i_2, i_3, 1, 0, i_6, i_7) = b \quad (33)$$

$$P_1(i_1, i_2, 1, 0, 0, i_6, i_7) = 1-c^2 \quad (34)$$

$$P_1(i_1, 1, 0, 0, 0, i_6, i_7) = 1-c^3 \quad (35)$$

$$P_1(1, 0, 0, 0, 0, i_6, i_7) = 1-c^4 \quad (36)$$

$$P_1(0, 0, 0, 0, 0, i_6, i_7) = 1 \quad (37)$$

数値計算の結果を図４，５に示す。但し$m \neq 7$であって，それぞれ$m=2$，３に対応するもので，出発点，目的点は図３の通りとした。

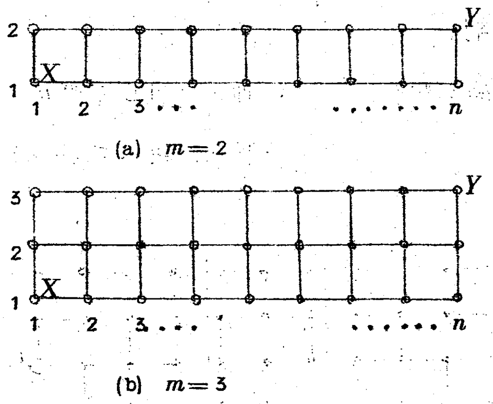

図 3　格子形網の計算モデル

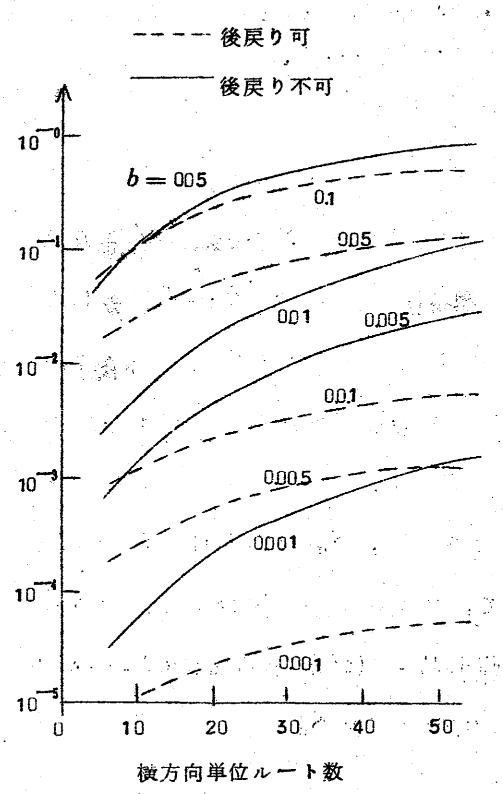

図 4　格子形網のルート不在確率　$m=2$

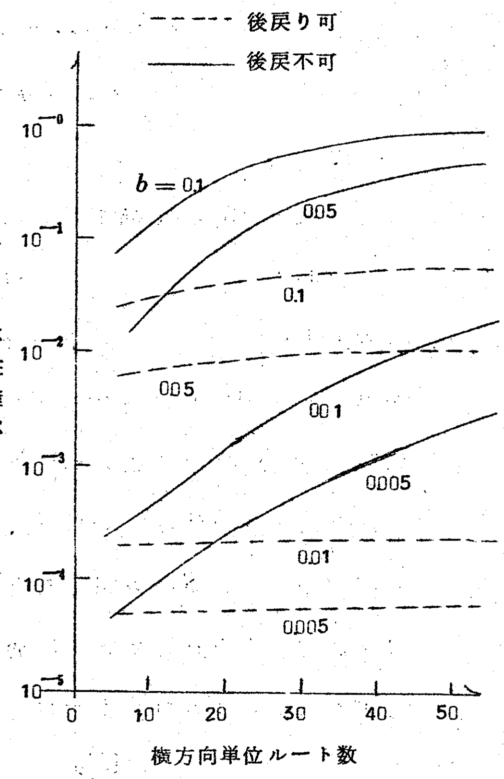

図 5　格子形網のルート不在確率　$m=3$

3. 蜂の巣形網

図6のような蜂の巣網を考え，前章と同じく第n列の縦のルートに着目する。蜂の巣形網の場合は格子形網に較べて縦の単位ルートの状態が

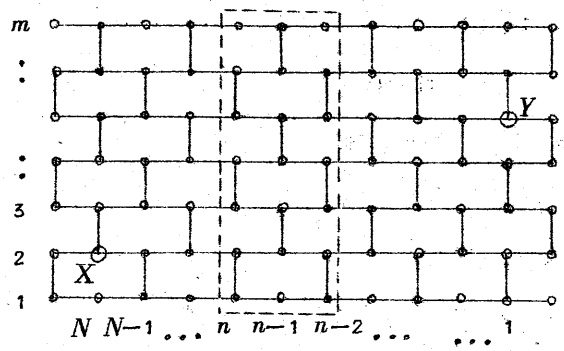

図6　ハチの巣形網

異る。図6は蜂の巣網を引き延ばしたものであるが，ベクトル$\boldsymbol{l}$の成分は1つおきにしかなく，ある場合は奇数番目ある場合は偶数番目にしか存在しない。しかし取扱う場合はその単位ルートが存在しない所の成分を0として用いれば同様である。すなわち蜂の巣網の場合は格子形網の特殊形として求めることができる。

前節で用いた状態の記号S_α，T_βをまとめ，S_αであり且つT_βである状態を新たにS_αと書くことにして，図6のような場合（第n列の$\boldsymbol{l}$は奇数項しか存在しない）に於ける確率$P_{n-1}(\boldsymbol{l}')$を新たに$Q_{n-1}(\boldsymbol{l}')$と書くことにすれば，まず状態S_αの生起確率$p(S_\alpha)$は

$$p(S_\alpha) = \prod_{r=1}^{m} \prod_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left[b^2 \left(\frac{c}{b}\right)^{j_r + l_{2k-1}} \right] \qquad (38)$$

となり，確率$P_n(i)$は縦方向の後戻りが可能な場合は，前節のJ_α を用いて次のように書ける。

$$P_n(i) = \sum_{\{S_\alpha\}} p(S_\alpha)\cdot Q_{n-1}(i') \tag{39}$$

但しi' は，マトリクスA_α を用いて

$$i' = J_\alpha A_\alpha i = H_\alpha i \tag{40}$$

と書ける。この場合のA_α は次のようになる。

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & l_1 & & & & & & \\ l_1 & 1 & & & & & 0 & \\ & & 1 & l_3 & & & & \\ & & l_3 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & 1 & l_{m-2} & \\ & & & & & l_{m-2} & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{for } m = \text{odd} \tag{41}$$

(41) 式はmが奇数の場合であり，mが偶数の場合はマトリクスの右下が１でなく$\begin{pmatrix} 1 & l_{m-1} \\ l_{m-1} & 1 \end{pmatrix}$ の小行列で終る。

次に$Q_{n-1}(i')$については，第$n-1$列を結ぶ縦のルートと右に延びる横ルートの総合状態をS'_β とすると，その生起確率$p(S'_\beta)$ は

$$p(S'_\beta) = \prod_{r=1}^{m} \prod_{k=1}^{[\frac{m}{2}]} \left[b^2 \left(\frac{c}{b}\right)^{j'_r + l'_{2k}} \right] \tag{42}$$

で与えられ，同様に次の諸式が成立する。

$$Q_{n-1}(i') = \sum_{\{s'_\beta\}} p(s'_\beta)\, P_{n-2}(i'') \tag{43}$$

$$i'' = J_\beta' \cdot A_\beta' \cdot i' = H_\beta' \cdot i' \tag{44}$$

但し，J_β'は（11）式のj_sをj_s'としたものであって，A_β'は

$$A_\beta' = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c|cc}
1 & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & l'_2 & & & & & \\
 & l'_2 & 1 & & & & 0 & \\
\hline
 & & & 1 & l'_4 & & & \\
 & & & l'_4 & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & \ddots & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & l'_{m-1} \\
0 & & & & & & l'_{m-1} & \\
\end{array}\right) \quad \text{for } m = \text{odd} \tag{45}$$

mが偶数の時はマトリクスA_βの右下は（41）式のマトリクスの右下のようになる。以上より（39）式と（42）式とをまとめて次のようになる。

$$P_n(i) = \sum_{\{s_\alpha\}} \sum_{\{s'_\beta\}} p(S_\alpha) \cdot p(S_\beta')\, P_{n-2}(i'') \tag{46}$$

$$i'' = H_\beta' \cdot H_\alpha i = J_\beta' A_\beta' J_\alpha A_\alpha i \tag{47}$$

こうして，第n列から目的点へ到り得ない確率$P_n(\boldsymbol{i})$を第$n-2$列の確率$P_{n-2}(\boldsymbol{i}'')$で表わすことができた。これが求める漸化式である。上式中，J_α，J'_βは前と同様のものであるが，A_α，A_β' は前述のマトリクス中，ベクトル$\boldsymbol{i}$の値を1つおきに0として変形したものであって，A_αが偶数番目を0としたものならばA'_β は奇数番目を0としたものである。

又縦方向の後戻りも許さない場合は，格子形網の場合と同様にしてマトリクスA_α の対角線より上を0とした行列B_α を用いて表わすことができる。即ち（47）式の代わりに

$$\boldsymbol{i}'' = J'_\beta\ B_\beta'\ J_\alpha\ B_\alpha\ \boldsymbol{i} \qquad (48)$$

を用いればよい。初期条件などに関しても格子形網の場合と同様にして与えることができる。

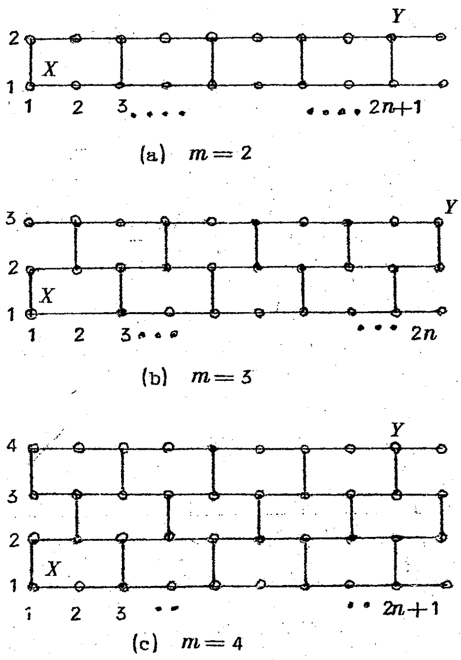

図7　ハチの巣形網計算モデル

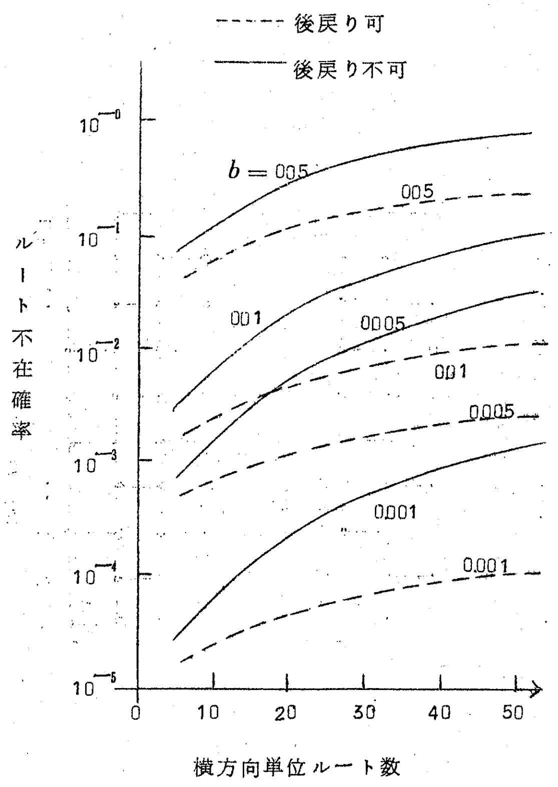

図 8　ハチの巣形網のルート不在確率　$m=2$

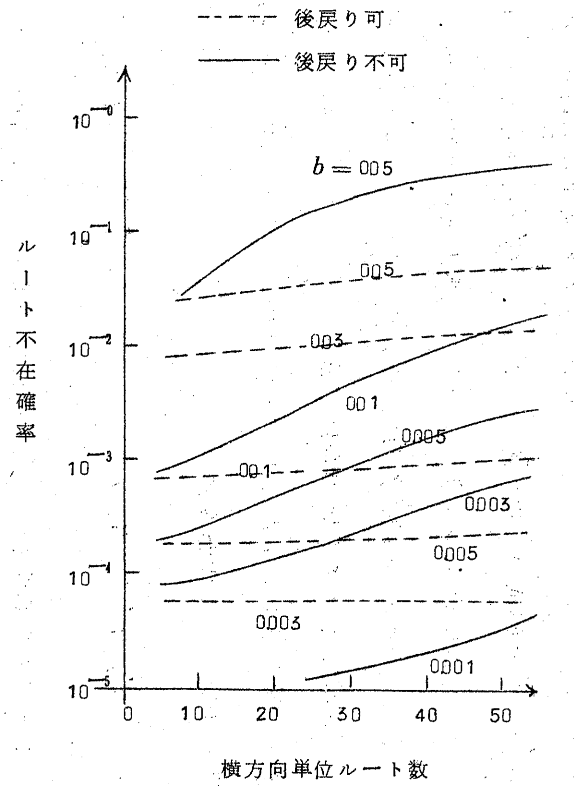

図 9　ハチの巣形網のルート不在確率　$m=3$

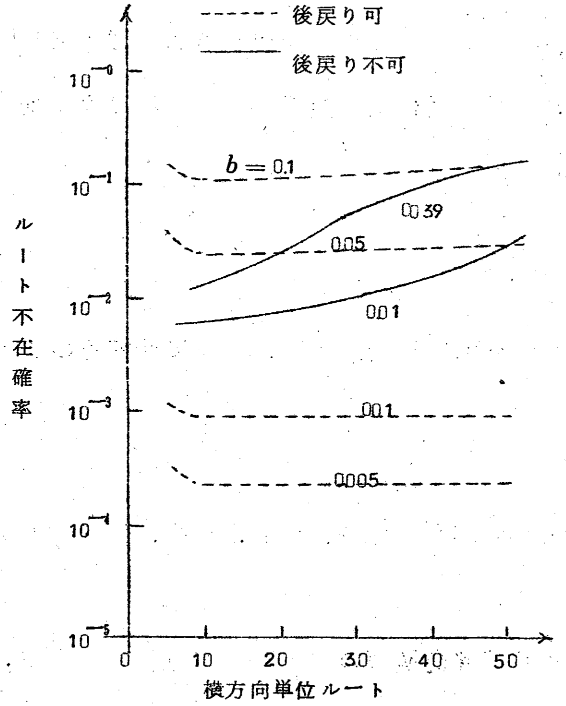

図１０　ハチの巣形網のルート不在確率　$m=4$

一例として$m=2$，３，４の３種について数値計算した結果を図８，９，１０に示す。出発点と目的点とは図７のようなものである。

むすび

蜂の巣形網，格子形網等の分散形網について，網を構成する各々の単位ルートがすべて等しい閉塞確率を持っている場合に，網内の任意の２点を結ぶルートがある条件のもとに存在する確率（逆に言えば呼損率）を漸化式として一般に与えた。又数値計算の結果，後戻りルートを部分的に許せばその２点間がかなり遠く離れていても近くにあるのと殆んど同じ確率でルート構成が可能であることを示した。ここに与えた式は，網が大きくなり後戻りルートがかなり広範囲に行なえるようになると計

算量が増すが，かなりの大きさの網でも普通の電子計算機を用いて計算が可能であり，又単に通信網呼損率の算出だけでなく他にも種々の応用が考えられる。

謝　辞

御検討いただいた本学秋山助教授，並びに研究室の方々に感謝する。

参考文献

(1)　「蜂の巣形交換網」尾佐竹，秋山，田中，信学誌 50，7，p.57 (昭 42—07)

(2)　「分散形多段中継交換網のルート選択方式」　田中，柴田 交換研資　SE 67—1 (1967—04)

盛