



オートマトン研究会資料  
インホメーション理論研究会資料  
資料番号  $A_{IT}67-15$  (1967-06)  
-13

# 最適アナログ通信方式

尾 佐 竹            徇  
田   中   英   彦  
( 東京大学・工学部 )

1 9 6 7 年 6 月 1 9 日

( 於 東 北 )

観 電 子 通 信 学 会

# The Optimum Analogue Communication System

TONAU OSATAKE and HIDEHIKO TANAKA

Faculty of engineering, University of Tokyo

As the one step toward the limit of analogue communication system which has some characteristics different from digital communication system, and to find some good communication system, the optimum receiver which maximizes the a posteriori probability is analyzed and average noise power is calculated for any amplitude-phase-modulation, assuming that the signal to noise ratio is high and the signal spectrum is CR type.

Using the formula, the analogue communication system is optimized minimizing the output noise power under the transmitting power and RF bandwidth constraint.

As the result, we can get the wide bandwidth gain of higher order than the conventional FM by modulating linearly the amplitude and the phase of carrier with signal.

## 最適アナログ通信方式

尾佐竹 徇

田 中 英 彦

(東京大学工学部)

### 1. まえがき

通信の分野に於いて、良い通信方式を見出すことは興味ある問題である。通信の良さの評価基準には、通信品質、経済性、使い易さなどがあるが、これらを用いて最適な通信方式を見出し通信の限界を捜すことは我々に課せられた課題である。情報理論では、一応 Shannon によつて通信の限界が示されているが、實際上その限界を達成する通信手段は未だ見つかつていない。PCM はかなり理想的な通信に近いものであるが、その理論的検討もかなり進みここ一段落つきかけた所で、又通信方式を再検討する必要があるのではなからうか。デジタル方式とは種々の差異や利点、欠点をもつアナログ変調方式についても又調べ直おす段階にあると思われる。従来迄にアナログ変調方式と言えば、AM、FM、FM 等があり、それら個々の特性については調べられているが、それらを統一的に取扱う方法に欠けており又最適アナログ変調方式についても全く解つていない。最適アナログ受信方式については今までに種々の研究が為されており、事後確率を最大にするという意味での最適受信方式がかなり一般的な形で求められている。しかしその最適受信機の解析は式の複雑さの為、未だなされていなかつた。

本論文は最適変調への一歩として、任意の振幅位相同時変調方式に対する MAP 推定を用いた最適受信方式を SNR の高い所で近似的に解析し、送信すべき信号をガウシアン、CR 形と仮定し伝送路は理想的伝送路、雑音はガウス雑音を仮定して受信側の出力雑音を求めそれを送信電力、と占有帯域の制限のもと最小にするような最適変調方式について取扱つたものである。

## 2. 最適受信方式の解析

### 2.1 最適受信方式

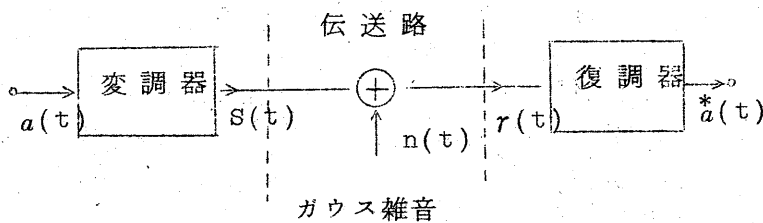


図 1. 通信系モデル

図 1. のような通信系を考える。雑音は加算的ガウス雑音とし、送るべき信号もガウス信号とすると、任意の変調

$$s(t) = S[t, a(t)] \quad (1)$$

に対する事後確率最大 (MAP) という意味での最適受信機は、定常受信で白色雑音 ( $W_n(f) = N_0/2, -\infty < f < \infty$ ) の時、次式で与えられる。

$$\hat{a}(t) = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^t R_a(t-u) \cdot \left[ \frac{\partial S[u, a(u)]}{\partial a(u)} \right]_{a=\hat{a}} \cdot \{r(u) - S[u, \hat{a}(u)]\} du \quad (2)$$

これは、図 2. のように普通の LCR で実現可能なフィルタを持つフィードバックループとして構成される。

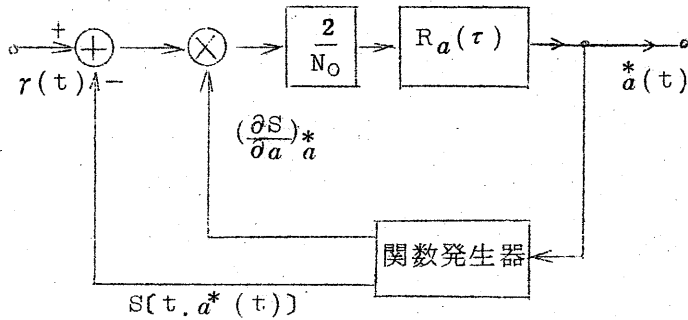


図 2. 最適受信機

2.2 振幅位相同時変調の受信出力

アナログ変調  $S(t)$  として、キャリア  $\omega_c$  の次のような振幅位相同時変調を考える。

$$S(t) = \phi[a(t)] \cdot \cos\{\omega_c t + \psi[a(t)]\} \quad (3)$$

雑音  $n(t)$  を 2 つの直交成分に分け、(3)式を(2)式に代入すると、 $R_a$  が low pass のような性質を持っていることから周波数が  $2\omega_c$  あたりの成分を除き、更に SNR が高いことを仮定すると  $\hat{a}^*$  は  $a$  に近いから  $\hat{a}^* - a$  の一次近似によつて、(2)式は次のような Volterra の第 2 種積分方程式に帰着する。

$$N_0 \hat{a}^*(t) + \int_{-\infty}^t R_a(t-u) \cdot [\hat{\phi}^2(a) + \phi^2(a) \cdot \hat{\psi}^2(a)] [\hat{a}^*(u) - a(u)] \cdot du = \int_{-\infty}^t R_a(t-u) \cdot [n_1(u) \cdot \hat{\phi}(a) - n_2(u) \cdot \phi(a) \hat{\psi}(a)] du$$

この解は無限級数として求められるが、信号  $a$  のスペクトル  $W_a(\omega)$  が CR 形をしていると(4)式の積分方程式は微分方程式に直おるため、より容易に解を求めることができる。すなわち  $W_a(\omega)$  として図. 3 のようなスペクトルを仮定すると、 $-\infty < f < \infty$  にて

$$W_a(\omega) = \frac{2\omega_a P_a}{\omega^2 + \omega_a^2} \quad R_a(\tau) = P_a \cdot e^{-\omega_a |\tau|} \quad (5)$$

但し、 $p_a$  は信号の平均電力、 $\omega_a$  は 3 dB down の周波数である。であつて、(4)式の両辺を  $t$  で微分し元の式と組み合わせると、次の様な微分方程式が得られる。

$$N_0 \cdot \dot{e}(t) + [N_0 \omega_a + P_a \cdot P^2(a)] \cdot e(t) = Q(t) \quad (6)$$

$$e(t) = \dot{z}(t) - a(t)$$

$$Q(t) = P_a \cdot [n_1(t) \cdot \phi(a) - n_2(t) \cdot \phi(a) \psi'(a)] - N_0 [\dot{a}(t) + \omega_a a(t)] \quad (7)$$

$$P^2(a) = \phi^2[a(t)] + \phi^2[a(t)] \cdot \psi^2[a(t)]$$

これを解くと、出力雑音の瞬時解  $e(t)$  は次のようになる。

$$e(t) = \int_{-\infty}^t \frac{Q(u)}{N_0} \cdot \exp[-\int_u^t \{\omega_a + \frac{P_a}{N_0} \cdot P^2[a(v)]\} dv] \cdot du \quad (8)$$

平均の雑音電力  $P_N$  は、これを信号  $a$  と雑音  $n$  とで集合平均すれば得られる。集合平均を  $E_a, n\{\}$  で表わせば、

$$P_N = E_a \cdot n\{e^2(t)\} \quad (9)$$

雑音だけで平均したものを  $\bar{e}^2(t)$  とすれば、雑音の covariance  $R_n$  を電力スペクトル  $W_n(\omega)$  で置き換えて、次のように求められる。

$$P_N = E_a \{ \bar{e}^2 \} \quad (10)$$

$$\bar{e}^2 = \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_1^2 = & \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) d\omega \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t \frac{P_a^2}{N_0} \cdot [\dot{\phi}(a_1) \cdot \dot{\phi}(a_2) + \phi(a_1) \cdot \phi(a_2) \\ & \bar{\psi}(a_1) \cdot \bar{\psi}(a_2)] \times \exp[j\omega(u_1 - u_2) - \omega_a(2t - u_1 - u_2)] \\ & - \frac{P_a}{N_0} \left\{ \int_{u_1}^t P^2[a(u_1)] du_1 + \int_{u_2}^t P^2[a(u_2)] du_2 \right\} du_2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_2^2 = & \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t (\dot{a}_1 + \omega_a a_1) \cdot (\dot{a}_2 + \omega_a a_2) \times \exp[\omega_a(2t - u_1 \\ & - u_2) - \frac{P_a}{N_0} \left\{ \int_{u_1}^t P^2[a(u_1)] du_1 + \int_{u_2}^t P^2[a(u_2)] du_2 \right\}] du_2 \end{aligned} \quad (13)$$

これらが信号がCR形の時の、任意の振幅位相同時変調に対する最適受信機の出平均雑音電力である。

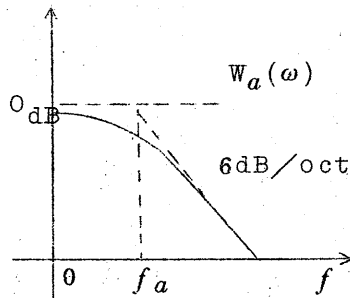


図3. 信号の電力スペクトル

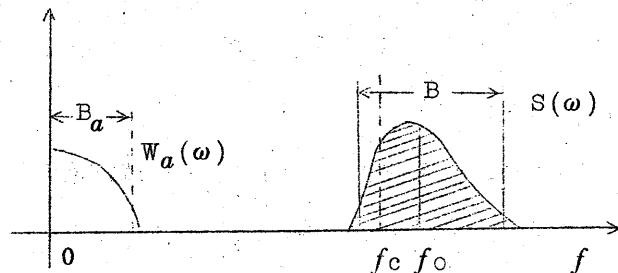


図4. 送信波及び変調信号のスペクトル

### 2.3 送信波の帯域と変調方式

送信波  $S(t)$  の電力スペクトルを  $S(\omega)$  とおくと ( $0 < f < \infty$ )、  
 スペクトルの中心周波数  $\omega_0$  は、

$$\omega_0 = \int_0^{\infty} \omega \cdot S(\omega) df / \int_0^{\infty} S(\omega) \cdot df \quad (14)$$

又帯域を電力スペクトルの平均値の周りの2次モーメントで定義すれば  
 帯域  $B$  は次のようになる。

$$\left(\frac{2\pi B}{2}\right)^2 = \int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 \cdot S(\omega) df / \int_0^{\infty} S(\omega) df \quad (15)$$

Parsevalの公式より、送信波の平均電力を  $P_S$  とし上式は、

$$(\pi B)^2 P_S = \int_0^{\infty} \omega^2 \cdot S(\omega) df - \omega_0^2 P_S \quad (16)$$

右辺第1項は、送信波の微分  $\dot{S}(t)$  の電力であり、又

$$E_a\{\dot{a}^2(t)\} = (2\pi B_a)^2 \cdot P_a \quad (17)$$

を用いて、(3)式を代入すると帯域  $B$  は、

$$B^2 = 4f_c^2 - 4f_0^2 + 2B_a^2 \cdot \frac{P_a}{P_S} \cdot E_a\{P^2(a)\} \quad (18)$$

これが変調関数  $\phi, \psi$  と帯域  $B$  との関係である。すなわち、帯域は中心  
 周波数  $f_0$  が定めれば、(7)式で与えられる  $P^2(a)$  の平均のみで定まる。

$f_0 = f_c$  の場合は、 $\hat{P}^2 = E_a\{P^2(a)\}$  とし

$$B^2 = 2B_a^2 \cdot P_a \cdot \hat{P}^2 / P_S \quad (19)$$

### 2.4 雑音出力 $P_N$ の解析

#### 2.4.1 解析の準備



2.2節で求めた雑音電力 $\bar{\theta}^2$ を、信号 $a$ で集合平均したものが受信機の平均出力雑音電力 $P_N$ である。 $a(t)$ は時間波形であるため、 $a$ で平均を取る為には波形の平均を取らねばならない。所が、(12)、(13)式のような雑音を $a$ に関して平均しようとする時、指数関数内に $a$ の関数 $P^2(a)$ の時間積分が入っている為解析は少し難がしくなる。そこでここでは、関数 $P^2(a)$ が余り急激な変化をしない場合について解析を進める。

今、指数項内の積分を平均値と変化分とに分けて、

$$\frac{P_a}{N_0} \int_u^t P^2[a(v)] dv = \frac{P_a}{N_0} \cdot \hat{P}^2 \cdot (t-u) + \varepsilon(u) \quad (20)$$

$$\varepsilon(u) = \frac{P_a}{N_0} \int_u^t \{P^2[a(v)] - \hat{P}^2\} dv \quad (21)$$

と置く。指数項は、 $\varepsilon(u)$ の小さい所では $\varepsilon(u)$ の一次で近似が出来、又 $t-u$ の大きい所では、 $\varepsilon(u)$ は余り大きくなりえない様に $\propto \sqrt{t-u}$ 平均値の項が十分効いて来るので全体としての影響は少い。従つて次の様な近似が可能である。

$$\exp\left[-\frac{P_a}{N_0} \int_u^t P^2[a(v)] dv\right] \doteq \exp[-\eta \omega_a (t-u)] \cdot [1 - \varepsilon(u)] \quad (22)$$

$$\eta = \hat{P}^2 / N_0 \omega_a \quad (23)$$

又変調関数 $\phi$ 、 $\psi$ を $a$ のべきで展開して次のように置く。

$$\phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{(\sqrt{P_a})^{n-1}} \cdot a^n \quad \psi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{(\sqrt{P_a})^{n+1}} \cdot a^n \quad (24)$$

すると次の様に書くことができる。

$$\begin{aligned} & \phi'(a_1) \cdot \phi'(a_2) + \phi(a_1) \cdot \phi(a_2) \cdot \psi'(a_1) \cdot \psi'(a_2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u(n,m)}{(\sqrt{P_a})^{n+m}} \cdot a_1^n a_2^m \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} u(n,m) &= (n+1)(m+1) \cdot x_{n+1} x_{m+1} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x_{n-i} \cdot \\ & \quad x_{m-j} \cdot y_i y_j \end{aligned} \quad (26)$$

#### 2.4.2 雑音 $\bar{e}_1^2$ の平均

(12)式に(22)式の近似を用いると

$$\begin{aligned} \bar{e}_1^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega) df \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t \frac{P_a^2}{N_0^2} \cdot \{ \phi'(a_1) \cdot \phi'(a_2) + \phi(a_1) \phi(a_2) \\ & \quad \cdot \psi'(a_1) \cdot \psi'(a_2) \} \times \exp[ j\omega(u_1 - u_2) - \omega_a(\eta+1) \\ & \quad \cdot (2t - u_1 - u_2) ] \cdot [ 1 - \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) ] \cdot du_2 \end{aligned} \quad (27)$$

$\varepsilon(u)$  に(21)式を代入し、上の関分を関数形によつて分け、更に変調関数をべき展開して信号  $a$  で集合平均すれば、次のようになる。

$$P_{N1} = E_a \{ \bar{e}_1^2 \} = k_1 - k_2 + k_3 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{P_a^2}{N_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u(n,m)}{(\sqrt{P_a})^{n+m}} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega) df \int_{-\infty}^t du_1 \\ & \quad \cdot \int_{-\infty}^t E_a \{ a_1^n a_2^m \} \times \exp[ j\omega(u_1 - u_2) - \omega_a(\eta+1) \cdot \\ & \quad (2t - u_1 - u_2) ] du_2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 2 \left( \frac{P_a}{N_0} \right)^3 \cdot \sum_{n,m,l} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u(n,m) \cdot u(l-k,k)}{(\sqrt{P_a})^{n+m+l}} \int_{-\infty}^{\infty} W_N(\omega) df \\ & \quad \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t du_2 \int_{u_1}^t E_a \{ a_1^n a_2^m a_3^l \} \times \exp[ j\omega(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

$$-\omega_a(\eta+1)(2t-u_1-u_2)]du_3 \quad (30)$$

$$K_3 = 2 \left(\frac{P_a}{N_0}\right)^3 \cdot \hat{P}^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u(n,m)}{(\sqrt{P_a})^{n+m}} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) df \int_{-\infty}^t du_1 \cdot \int_{-\infty}^t (t-u_1) \cdot E_a \{ a_1^n a_2^m \} \times \exp[j\omega(u_1-u_2) - \omega_a(\eta+1) \cdot (2t-u_1-u_2)] du_2 \quad (31)$$

ここで、 $a$  の集合平均と積分の順序入れ替えが可能であることを用いた。

式中、 $E_a \{ a_1^n \cdot a_2^m \cdot a_3^l \}$  があるが、 $a$  の covariance が(5)式で与えられガウシアンであることを用いて計算を行い、又(23)式より  $\eta$  は、

$$\eta = \frac{P_a \hat{P}^2}{N_0 \omega_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{B_a}\right)^2 \frac{P_s}{N_0 \omega_n} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{B}{B_a}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{in} > 1 \quad (32)$$

であることを用いて近似を行うと、 $k_1$  etc は次の様になる。

$$K_1 = K_3 / 2 \doteq N_0 f_n / \hat{P}^2 \quad (33)$$

$$K_2 \doteq 2 \frac{N_0 f_n}{(\hat{P}^2)^3} \sum_{(n+m+l+k=\text{even})} u(n,m) \cdot u(l,k) \cdot (n+m+l+k-1)!! \quad (34)$$

又送信波の平均電力  $P_s$  と帯域  $B$  (代わりに  $\hat{P}^2$ ) を展開係数で表わすと、

$$P_s = \frac{1}{2} P_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (n+m-1)!! \cdot x_n x_m \quad (35)$$

$$\left( \begin{array}{l} n+m=\text{even} \end{array} \right)$$

$$\hat{P}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (n+m-1)!! \cdot u(n,m) \quad (36)$$

$$\left( \begin{array}{l} n+m=\text{even} \end{array} \right)$$

#### 2.4.3 雑音 $\bar{e}_2^2$ の平均

もう1つの雑音成分  $\bar{e}_2^2$  は、受信出力の歪に相当するもので、伝送路雑音のスペクトルが陽に効いて来ないし又変調方式によつても余り変

わらない。そこで、 $\bar{\sigma}_2^{-2}$  を  $a$  で平均したものの値を評価する意味で、指数項内の  $P^2[a]$  を  $P^2$  で置換して求めてみよう。(13)式より、

$$\bar{\sigma}_2^{-2} = \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t (a_1 + \omega_a a_1)(a_2 + \omega_a a_2) \cdot \exp(-\omega_a(\eta+1)(2t-u_1-u_2)) du_2 \quad (37)$$

信号  $a$  は定常的だから積分内を平均すると

$$E_a\{(a_1 + \omega_a a_1)(a_2 + \omega_a a_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} W_a(\omega) \cdot (\omega_a^2 + \omega^2) \cdot e^{j\omega(u_1-u_2)} df \quad (38)$$

信号のスペクトル(5)式を用い、積分範囲を  $-f_n < f < f_n$  として

$$P_{N2} = E_a\{\bar{\sigma}_2^{-2}\} = \int_{-f_n}^{f_n} df \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t 2\omega_a P_a \cdot \exp(j\omega(u_1-u_2) - \omega_a(\eta+1)(2t-u_1-u_2)) du_2 = \frac{4P_a}{2\pi(\eta+1)} \cdot t a n^{-1} \cdot \left[ \frac{\omega_n}{\omega_a(\eta+1)} \right] = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot \frac{1}{\eta} \quad (39)$$

#### 2.4.4 全雑音電力 $P_N$

$P_{N2}$  は、 $P_{N1}$  よりも  $\eta$  について1次オーダーが低い(39式)から省くと、全雑音電力  $P_N$  は次の様になる。

$$P_N = P_{N1} = K_1 - K_2 + K_3 = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} - 2 \cdot \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot [H-1] \quad (40)$$

$$H = \sum_{\substack{(n,m,l,k=0) \\ n+m+l+k=\text{even}}} \frac{u(n,m) \cdot u(l,k)}{(\hat{P}^2)^2} \cdot (n+m+l+k-1)!! \quad (41)$$

### 2.4.5 雑音式の適用例

上に求めた雑音式を用い、 $P^2(a) = \text{一定}$  という簡単な例について調べてみよう。 $P^2(a) = C_0^2$  の場合は、(7)式より次のような場合である。

①  $\phi(a) = C_0$  ,  $\phi(a) \cdot \psi(a) = 0$  即ち、 $\phi(a) = C_0 \cdot a + C_1$  ,  $\psi(a) = C_2$  , でAMに相当する。 ②  $\phi(a) = 0$  ,  $\phi(a) \cdot \psi(a) = C_0$  即ち、 $\phi(a) = C_1$  ,  $\psi(a) = C_0 / C_1 \cdot a + C_2$  でPMに相当する。このように  $P^2(a) = \text{一定}$  とは、AM, PM等をも含む。この時、(21)式より  $\varepsilon(u) = 0$  であるから、 $K_2 = K_3$  で従つて(40)式中の  $H = 1$  , 故に

$$P_N = \frac{N_0 f_n}{P^2} = \frac{N_0 f_n}{P_S} \cdot \frac{2B_a^2 P_a}{B^2} \quad (42)$$

従つて出力SNRは次の様になる。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{P_a}{P_N} = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{B_a}\right)^2 \cdot \frac{P_S}{N_0 f_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{B_a}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} \quad (43)$$

## 3. 最適変調方式

前章で得た、一般の振幅位相同時変調方式に対する最適受信機の平均雑音電力式を用い、ここでは送信電力と占有帯域一定のもと出力SNRを最大にするような変調方式を求める。始めに、振幅変調を行わない場合の最適位相変調関数を求め、次に振幅変調も加味して求める。

### 3.1 最適位相変調

$x_n = 0$  ( $n \geq 1$ ) の時、 $u(n, m)$  は(26)式より

$$u(n, m) = x_0^2 \cdot y_{nym} \quad (44)$$

今、位相変調関数  $\psi(a)$  は直線PMより余り離れないとすると

$$|y_0| \gg |y_n| \quad n \geq 1 \quad (45)$$

又、 $x_0$  は、送信電力条件 (35) 式より

$$x_0 = \sqrt{2P_s / P_a} \quad (46)$$

この時、 $H$  及び  $\hat{P}^2$  は次の様に近似される。

$$H \doteq \left(\frac{x_0^2}{\hat{P}^2}\right)^2 \cdot \left[ y_0^4 + 4y_0^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!! \cdot y_{2n} \right] \quad (47)$$

$$\hat{P}^2 \doteq x_0^2 \cdot \left[ y_0^2 + 2y_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!! \cdot y_{2n} \right] \quad (48)$$

(48) 式を (49) 式に代入すると、

$$H \doteq \left(\frac{x_0^2}{\hat{P}^2}\right) \cdot \left[ \left(\frac{\hat{P}^2}{x_0^2}\right)^2 - \left(y_0^2 - \frac{\hat{P}^2}{x_0^2}\right)^2 \right] \quad (49)$$

従つて、 $H$  は  $y_0$  のみの関数として図 5 のように変化する。故に、

$$y_0^2 = \hat{P}^2 / x_0^2 \quad (50)$$

の時  $H$  が最大、すなわち雑音電力  $P_N$  が最少になる。

又、(36) 式の  $\hat{P}^2$  が任意の  $\{y_n\}$  に対して正であることから

$$y_n = 0 \quad (n \geq 1) \quad (51)$$

即ち位相変調関数としては直線  $PM$  が locally optimum である。

### 3.2 最適アナログ変調

前節で振幅変調をとまなわない時は、直線  $PM$  が locally optimum

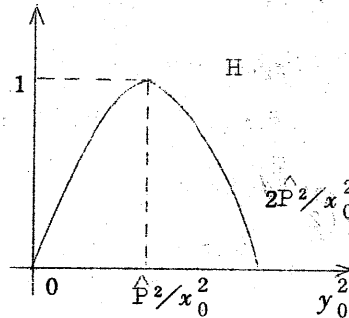


図 5.  $y_0$  に対する  $H$  の変化。

だと言ったことが示されたので、次に直線 PM に AM をかけた変調を考える。変調関数  $\phi$ 、 $\psi$  としては最も単純な次のものを考える。

$$\left. \begin{aligned} \phi(a) &= x_0 \sqrt{P_a} + x_1 \cdot a \\ \psi(a) &= y_0 / \sqrt{P_a} \cdot a \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

この時、 $u(n, m)$  は  $u(1, 0)$ 、 $u(1, 1)$  の 3 種しか存在せず、 $H$  は電力と帯域条件を使つてまとめれば、次のようになる。

$$H = 1 + \frac{Z^2}{(r \hat{P}^2)^2} \cdot (\hat{P}^2 \cdot Z - Z^2) \cdot [Z^2 - (2r + \hat{P}^2) \cdot Z + r \cdot \hat{P}^2] \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し、} \quad Z &= x_1^2, \quad r = 2P_s / P_a, \quad x_0 = \sqrt{r - Z_m} \\ y_0 &= \sqrt{\frac{1}{2} \frac{B}{B_a} \frac{Z_m}{r}} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

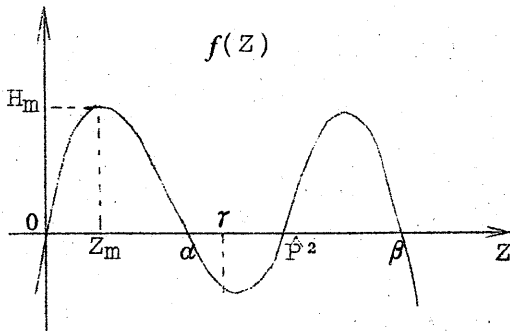
又、 $Z$  は、 $x$ 、 $y$  が実数であることから

$$0 \leq Z \leq r, \quad 0 \leq Z \leq \hat{P}^2 \quad (55)$$

の両式を満たさねばならない。 $H$  は  $Z$  のみの関数で、今  $f(Z)$  として

$$f(Z) = (\hat{P}^2 Z - Z^2) \cdot [Z^2 - (2r + \hat{P}^2) Z + r \hat{P}^2] \quad (56)$$

図 6. 関数  $f(Z)$  と極値



を考え、これを図示すると図. 6 のようになる。但し、 $\alpha$ 、 $\beta$  は

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[ (2r + \hat{P}^2) + \sqrt{4r^2 + (\hat{P}^2)^2} \right] \quad (57)$$

従つて、(55) 式の範囲での  $f(Z)$  (従つて  $H$ ) の最大値は、 $f(Z)$  の最初の極大値で生じる。ゆえに、極値を与える  $Z_m$  は次の式を満たす。

$$\hat{f}(Z_m) = r \hat{P}^2 - 2(3r \hat{P}^2 + \hat{P}^2) Z_m + 6(r + \hat{P}^2) Z_m^2 - 4Z_m^3 = 0 \quad (58)$$

又、 $r$  と  $\hat{P}^2$  との関係は、(19) 式から

$$\frac{\hat{P}^2}{r} = \frac{P_a \hat{P}^2}{2P_s} = \frac{1}{4} \left(\frac{B}{B_a}\right)^2 \quad (59)$$

傾向を見る為  $f(Z)$  の 4 次曲線を  $Z_m$  の辺りで 2 次曲線とみなすと  $Z_m = \alpha/2$  であるからこれを  $f(Z_m)$  に代入し、 $H_{\max}$  を求めると (57) 式を用いて、

$$H_{\max} = 1 + \frac{1}{\xi^4} \cdot \left[ (16 - 2\xi^2 + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^8}{256}) + \left( \frac{\xi^6}{64} + \xi^2 - 8 \right) \cdot \sqrt{4 + \frac{\xi^4}{16}} \right] \quad (60)$$

$$\xi = B/B_a \quad (61)$$

$\xi$  の大きい所、即ち帯域が広い場合は、(60) 式は次のようになる。

$$H_{\max} = 3/2 - 4/\xi^2 \quad (62)$$

ゆえに、出力平均雑音電力  $P_N$  は

$$P_N = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot [1 - 2(H_{\max} - 1)] = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot \frac{8}{\xi^2} \quad (63)$$



従つて出力の SNR は次の様に求められる。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{P_a}{P_N} \cdot \frac{P_s}{16N_0 f_n} \cdot \left(\frac{B}{B_a}\right)^4 = \frac{1}{16} \left(\frac{B}{B_a}\right)^4 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} \quad (\text{B 充分大}) \quad (64)$$

このように帯域が広い時出力 SNR は、帯域の 4 乗に比例する。

実際に、3 次方程式 (58) 式を解いて、 $Z_m$ 、 $H_{\text{max}}$  を求めると表 1、

図 7 のようになる。但し、 $\mu$ 、 $G$  は次のように定義される。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{1}{16} \left(\frac{B}{B_a}\right)^4 \cdot \mu \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = G \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} \quad (65)$$

このように、 $Z_m$  の近似は、帯域の広い所でよく成立し、又安全側の近似である。

$B/B_a$	$Z_m/r$	$H_m$	$\mu$
2	0.1624	1.146	2.830
5	0.3942	1.373	1.257
10	0.4708	1.462	1.061
20	0.4925	1.490	1.016
30	0.4988	1.498	1.002

表 1. 極値の計算値

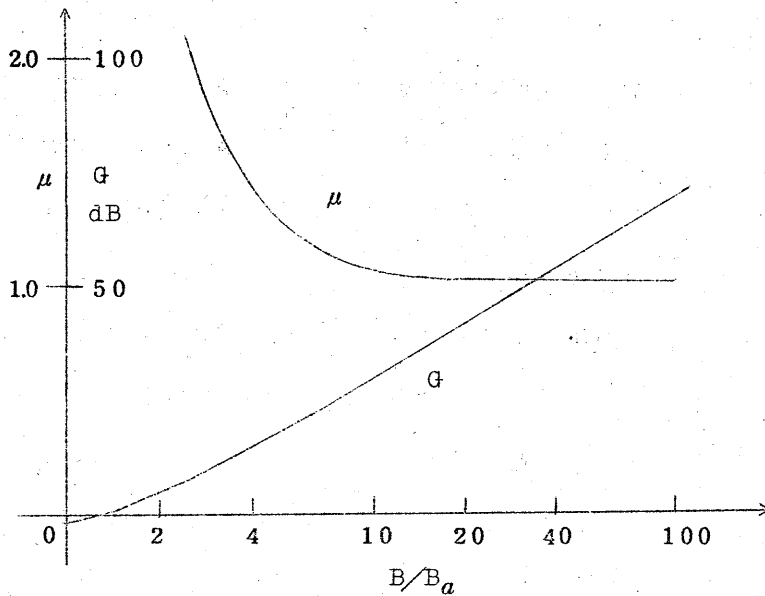


図 7. 占有帯域と広帯域利得

#### 4. 結果の検討及び今後の問題点

前章で最適な振幅位相同時変調を求めその出力 SNR が帯域の 4 乗に比例するというを示した。しかし、最適受信機の出力雑音として信号波形  $a$  で平均を取る以前の式 (12) はかなり正確であるが、これを信号  $a$  で平均する段階に於いて用いた指数関数に対する近似がまず問題である。この近似は、 $P^2(a)$  が余り変動しない範囲でしか成立しないので、一般的な変調方式を一手に表わしているものとは言えない。しかし、前章で述べたようにアナログ変調方式では、普通の FM 等に見られるような占有帯域の 2 乗に比例する広帯域利得よりも、より高次の利得を得ることのできる可能性があり、今後これらの式を基としてより詳しい解析が望まれる。

又ここでは、変調方式として(3)式に与えたような振幅位相の同時変調方式を仮定したが、一般の変調方式は必ずしもこの形で書き表わすことができないので、この仮定が適用アナログ変調の範囲を狭めている恐れがある。又帯域に関しても2乗平均帯域以外との対応があるし、キャリアとスペクトル中心周波数との相異から $P^2(a)$ が一定でも(即ち出力SNRが一定)帯域のずつと狭い方式を見出す可能性も存在する。

その他、SNRの低い時の問題、スレシヨールド問題なども今後に残された問題である。

## 5. むすび

アナログ通信方式に於ける最適受信方式を解析し雑音の式を与え、それを基として出力SNRを占有帯域と送信電力一定のもとに最大にするような最適変調方式を求めた所、従来のFMなどよりもより高次の広帯域利得をもつ変調方式を見出した。

これらの結果がすぐにアナログ通信の限界を与えるものとは言えないが、そこへ到る一步として考察を行つたものである。まだ検討すべき余地は多いが、この方面に関心のある方々の参考になれば幸いである。

## 謝 辞

本研究を進めるにあたり、種々お世話になつた本学秋山稔助教授及び研究室の方々に感謝する。

## 参考文献

1. J. B. Thomas & E. Wong "On the statistical theory of

optimum modulation" IRE Trans. vol. IT-6 Sept  
1960

2. H.L. Van Trees " The structure of efficient demodulation for multidimensional phase modulated signals" IEEE Trans. vol CS-11 Sept 1963
3. H.L. Van Trees " Bound on accuracy attainable in the estimation of continuous random process " IEEE Trans. vol IT-12 July 1966
4. 田中英彦 " 最適通信方式 " 東京大学修士論文第1部 1967年3月
5. 田中英彦 " 最適受信方式の信号対雑音比 " 昭和42年度 電気4学会連合大会