UDC 621.394.5

伝送方式におけるマトリクス変換の特性とその応用

正員　田中　英彦†

Characteristics and Applications of Matrix Conversion in Information Transmission System

Hidehiko TANAKA†, *Member*

あらまし　幾つかの並列伝送路を通して，それとは一般に異なる数の情報を能率良く伝送するための方式として前にマトリクス変換方式を提案した．この方式は送受信両側，または片側だけに適当なマトリクス（正方形とは限らない）を置き，信号変換を行なうという方式であるが，本論文ではさらにこの方式を送信電力条件について拡張した結果を示すとともに，マトリクス変換一般の特性と二，三の応用例とについて述べた．一般的特性としては，マトリクスを決定する種々の特性行列の出力に及ぼす影響を考察して数値結果を示し，応用例については，直列パルス伝送の干渉補償方式，等化フィルタ，ケーブル間漏話などの対策としての並列伝送方式，帯域圧縮と出力 SNR の関係解析などであるが，これらおのおのについてマトリクス変換の適用法を示し，特性などについてもその幾つかについて調べている．

Summary　We proposed in our previous paper an optimum matrix conversion system, which is one of the matching systems between information and parallel transmission lines, where matching is achieved through matrix conversion of signals at the transmitter and the receiver. In this paper, a more general solution is given which is expanded about the power constraint of the transmitter, and discusses the general characteristics and some applications of the matrix conversion system. Main applications are to compensating systems of interpulse interferences in series transmission and to interline crosstalk in parallel transmission.

1. まえがき

幾つかの並列伝送路と幾つかの送信情報とがあった場合，情報を伝送路に整合させて能率の良い伝送をおこなうためには送受信側でなんらかの信号変換が必要である．この信号変換の一方法にマトリクス変換がある．これは送信情報幾つかを適当な重みで加え合わせ伝送路チャネル数に等しいだけの信号を作って伝送する方法で，情報や伝送路に応じてそのマトリクスをいかに構成すべきかについては前に[1]発表したとおりである．ここでは，このマトリクス変換方式について，情報や伝送特性および評価関数などに対するその特性と，二，三の応用例とにつき検討した結果をご報告する．

まず始めに，**2**. は最適マトリクス変換の構成について調べたものである．ここで述べる最適マトリクス変換は前論文[1]で与えた最適マトリクス変換の拡張であって，幾つかの伝送路で送られる送信全電力一定のもと最適マトリクスを構成するのではなく，送信電力条件をより一般化し各伝送路ごとの電力条件をも考慮したものである．

つぎの **3**. はマトリクス変換の一般的特性について述べたもので，伝送路特性，雑音相関，信号相関，それぞれの出力 SNR に及ぼす影響を調べている．そして **4**. はマトリクス変換を種々応用した例について，特にその使い方について三つほど述べた．まず直列パルス伝送における符号間干渉の除去対策として使った

† 東京大学工学部電気工学科，東京都
Faculty of Engineering, University of Tokyo, Tokyo, Japan 113

論文番号：昭 46-1201［A-321］

場合が一つ，これはいわゆるタップ付遅延線による干渉補償方式の拡張になっている．二つ目はマトリクス変換と通常の等化フィルタとの関連を述べたもので，マトリクス変換から直接最適受信フィルタが導けることを示すとともに，並列に幾つか存在する伝送線路間相互の漏話，たとえば画像信号の多条ケーブル伝送における漏話に対する補償方式に応用した例で，通常のフィルタと同様連続波形に対するフィルタとして使用する場合の適用法を示している．三つ目は，送信すべき情報サンプルの数が，与えられた伝送チャネル数と異なる場合の整合方式として利用した例である．情報サンプルの数が伝送チャネル数より小さい場合，これはケーブルの心線選択と同じようにできるだけ減衰が少なく伝送特性の良い伝送形態を選ぶ問題となり，これについては **3**．で述べている．逆に情報サンプルの数が伝送チャネル数より大きくなるとこれは情報帯域圧縮の一方式となり，その特性についてここで検討した．

2．最適マトリクス変換

2.1 マトリクス変換方式

図1はマトリクス変換を用いた並列伝送方式のモデルである．図中，送受信行列は A, D であり，伝送特性，雑音特性，送信情報特性などはそれぞれ，伝送行列 T，雑音の共分散行列 Q，情報共分散行列 R で表わす．送信情報ベクトルは $\boldsymbol{X}$ で，この次数は一般に伝送チャネル数 m とは異なるものとする．このようなモデルにおいて，受信情報出力ベクトル $\boldsymbol{Y}$ を $\boldsymbol{X}$ に最も近づけるためには行列 A, D を適当に選ぶ必要がある．この最適行列解析の制約条件には送信電力条件と無ひずみ条件とがあり，前者について前論文では全チャネルの総送信電力和のみを一定としており，個別的な各チャネル電力については考慮していなかった．そこで，ここでは前論文をさらに拡張し，各チャネルの送信電力を考慮した最適マトリクスを与える．したがって，送信電力条件は前論文の式 (1) の代わりに，重み $\{\psi_i\}$（これを対角成分とする行列 Ψ）を用いて

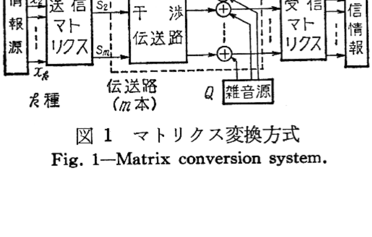

図 1　マトリクス変換方式
Fig. 1—Matrix conversion system.

$$P_s=\underset{x}{E}\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i S_i^2\} \qquad (1)$$

を一定とする条件に拡張する．ただし $\underset{x}{E}\{\ \}$ は $\boldsymbol{X}$ での集合平均を意味する．無ひずみ条件は，無雑音の場合受信情報ベクトルの各成分が互いに他成分からの洩れを含まずかつ送信情報と完全に等しいという条件で，前論文と同じく（前論文では規格化条件と称している）この条件を課す場合と課さぬ場合とおのおのについての解を求める．また最適性の評価関数も前論文と同じく，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の差ベクトルの各成分の平均電力を重み付け加算したものにとる（重み $\{\varphi_i\}$：これを対角成分とする行列 Φ）．すなわち，評価関数 P_N としては

$$P_N=\underset{x,n}{E}\{\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(x_i-y_i)^2\} \qquad (2)$$

をとることにする．

2.2 最適マトリクスの解法と解

最適マトリクスを求める手順は前論文と同様である．未定係数 λ を用いて電力条件を加味し，送信行列 A に変分法を適用すれば最適行列条件が求まる．たとえば無ひずみ条件を考慮した場合には，前論文の式 (19) に相当するものとしてつぎのような条件が求められる．

$$\Phi DQ^tD=\lambda^tA\Psi AR \qquad (3)$$

この条件を解けば最適マトリクスが得られるが，それには新たに行列 F を

$$F=W_2{}^tU\Psi UW_2 \qquad (4)$$

で定義し，この固有直交行列を Λ として送信行列 A を

$$A=UW_2\Lambda A_1{}^tZR_2{}^{-1t}V \qquad (5)$$

により A_1 に変換すれば A_1 を対角行列と零行列の組み合わせとして求めることができる．ここに，W_2, U, R_2, Z, V などは，行列 T, Q, R などから求められる行列であるが，以下はこのようにして求めた最適マトリクスの一般解である．

（1） 無ひずみ条件を入れた場合（$k\leq m$ に限られる）

$$A=\Pi A_1\Xi^{-1} \qquad (6)$$

$$D=\Xi D_1\Pi^{-1}T^{-1} \qquad (7)$$

ただし，A_1, D_1 は

$$\left.\begin{aligned} &A_1=\begin{bmatrix}A_0\\ \cdots\cdots\\ 0\end{bmatrix}<k \qquad A_0=\begin{bmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_k\end{bmatrix}\\ &D_1=(A_0{}^{-1}\ \overset{k}{\underset{\vdots}{\vee}}\ 0)\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$a_i=\frac{\sqrt{P_s}}{\sigma}\left(\frac{g_i}{f_i}\right)^{1/4}\Big/\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\sqrt{f_jg_j}} \qquad (9)$$

で与えられ，Π, Ξ はつぎのようなものである．

$$\Pi = UW_2\Lambda \quad \{\pi_{ij}\} \tag{10}$$

$$\Xi = VR_2Z \quad \{\xi_{ij}\} \tag{11}$$

ここに f_i, g_i は行列 F, G の固有値であって

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_m \tag{12}$$

$$g_1 \geqslant g_2 \geqslant \cdots \geqslant g_k \tag{13}$$

さらに，この F, G は以下のように定まる行列である．

$$\left.\begin{aligned} F &= W_2{}^tU\Psi UW_2 \\ G &= R_2{}^tV\Phi VR_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} {}^tUWU &= \eta\cdot W_0, \quad W_0 = W_2W_2 \\ {}^tVRV &= \sigma^2R_0, \quad R_0 = R_2R_2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} {}^t\Lambda F\Lambda &= F_0, \quad \{f_i\} \\ {}^tZGZ &= G_0, \quad \{g_i\} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$W = T^{-1}Q^tT^{-1} \tag{17}$$

上式中，U, V, Λ, Z はいずれも行列 W, R, F, G の固有直交行列であり，固有値行列は W_0, R_0, F_0, G_0 である．また，η, σ^2 は固有値を無次元化するための係数である．

上の最適行列変換を行なった時，$\sharp i$ 出力に含まれる雑音電力 N_i はつぎのように与えられる．

$$N_i = \frac{\eta\sigma^2}{P_s}\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{f_jg_j}\right]\left[\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{f_j}{g_j}}\cdot\xi_{ij}{}^2\right] \tag{18}$$

（2） 無ひずみ条件の入らない場合

この場合は前と異なり，m と k との大小関係は自由であり，出力の誤差には伝送路雑音とひずみとが含まれる．

最適行列は前と同様，式 (5), (6) で与えられる．ただし，A_1, D_1 が前と異なりつぎのようになる．

$$A_1 = \begin{cases} \begin{bmatrix} A_0 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \!<\! k & \cdots k \leqslant m \\ (A_0 \overset{\overset{m}{\vee}}{\vdots} 0) & \cdots k > m \end{cases} \tag{19}$$

$$D_1 = \begin{cases} (D_0 \overset{\overset{k}{\vee}}{\vdots} 0) & \cdots k \leqslant m \\ \begin{bmatrix} D_0 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \!<\! m & \cdots k > m \end{cases} \tag{20}$$

A_0, D_0 は対角行列で，その成分 a_i, d_i は

$$a_i = \frac{1}{\sigma}\left[(P_s + \eta\sum_{j=1}^{l}f_j)(\sum_{j=1}^{l}\sqrt{f_jg_j})^{-1}\sqrt{\frac{g_i}{f_i}} - \eta\right]^{1/2} \tag{21}$$

$$d_i = \sigma\left[(\sum_{j=1}^{l}\sqrt{f_jg_j})(P_s + \eta\sum_{j=1}^{l}f_j)^{-1}\sqrt{\frac{f_i}{g_i}}\right]^{1/2} \cdot\left[1 - \eta(\sum_{j=1}^{l}\sqrt{f_jg_j})(P_s + \eta\sum_{j=1}^{l}f_j)^{-1}\sqrt{\frac{f_i}{g_i}}\right]^{1/2} \tag{22}$$

ただし，$l = \mathrm{Min}\{k, m\}$

として与えられる．他の行列については全く前と同様式 (9)～(17) で与えられる．

また，このとき $\sharp i$ 出力に含まれる誤差電力 N_i はつぎのようになる．

$m \geqslant k$ のとき

$$N_i = \sigma^2\eta(\sum_{j=1}^{k}\sqrt{f_jg_j})\left(\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{f_j}{g_j}}\xi_{ij}{}^2\right)(P_s + \eta\sum_{j=1}^{k}f_j)^{-1} \tag{23}$$

$m < k$ のとき

$$N_i = \sigma^2\left[\eta(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{f_jg_j})\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{f_j}{g_j}}\cdot\xi_{ij}{}^2\right) + (P_s + \eta\sum_{j=1}^{m}f_j)\cdot(\sum_{j=m+1}^{k}\xi_{ij}{}^2)\right]\cdot(P_s + \eta\sum_{j=1}^{m}f_j)^{-1} \tag{24}$$

3．マトリクス変換の諸特性

3.1 伝送路特性

伝送路特性のみを考慮するために，他の特性については理想的と考える．したがって，情報間の相関はなく，雑音は白色であり，送信電力重みも一様とする．すなわち，

$$R = \sigma^2I_k, \quad Q = \eta I_m, \quad \Psi = I_m \tag{25}$$

である．いま無ひずみ条件を入れた場合を考えると，このときの最適送信行列は前論文式 (47) で与えられるが，出力 SNR は各情報に対する重み行列 Φ に依存する．固有値行列 F_0, G_0 はそれぞれ行列 F, G の固有値を小さい順，大きい順に並べたものであるから，固有値 w_i については式 (11) より

$$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_m \tag{26}$$

と並べたものにしておくと，固有行列 Λ は単位行列 I_m になる．一方，G について考えるとこれは対角行列となり，$G = \Phi$ である．よってこの時の固有行列 Z は，この重みを大きい順に並べ換える置換行列となる．

したがって今，重み φ_i の大きい順位を $\beta(i)$ で表わせば，各出力の SNR の比はつぎのようになる．

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_i : \left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_j = \sqrt{\frac{\varphi_i}{w_{\beta(i)}}} : \sqrt{\frac{\varphi_j}{w_{\beta(j)}}} \tag{27}$$

固有値 w_i は m 個存在し伝送路行列 T のみで定まるが，出力雑音の大きさを定めるのはそのうち小さい順に k 個取った固有値である．情報数 k が伝送路数 m より小さい場合，送信電力（チャネル当り）を同じにして考えると，k が小さくなるにしたがって出力 SNR は大きくなる．これは m 個の固有値のうち小さい k 個を取ればよいことにより得られる利得で

ある．

各情報の出力 SNR を等しくしたい時は，重み $\{\varphi_i\}$ に対して順位を考えず

$$\varphi_i \propto w_i \tag{28}$$

とすればよい．この時の各出力の SNR は

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_i = \frac{P_s}{\eta}\left[\sum_{j=1}^{k} w_j\right]^{-1} \tag{29}$$

となる．

たとえば，伝送路行列 T として $(m=2)$

$$T=\begin{Bmatrix}\alpha_1\cos\theta_1, & \alpha_2\sin\theta_2\\ \alpha_1\sin\theta_1, & \alpha_2\cos\theta_2\end{Bmatrix} \tag{30}$$

を考えると，α_1, α_2 は減衰を表わし，θ_1, θ_2 は干渉の度合を表わす．いま，減衰を等しく

$$\alpha_1=\alpha_2=r \tag{31}$$

とおくと，出力 SNR はつぎのようになる $(k=2)$．

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_i = r^2\cdot\cos^2(\theta_1+\theta_2)\cdot\frac{S_0}{\eta} \quad i=1, 2 \tag{32}$$

右辺第1項が伝送路減衰による影響を表わし，第2項が干渉による効果，第3項が送信電力と雑音の影響を与えている（S_0 はチャネル当りの送信電力）．

この2チャネルを用いて一つの情報しか伝送しない場合は，固有値 w_1, w_2 のうち小さいほうのみを用いることによってつぎのようになる．

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_1 = \frac{r^2\sqrt{2}\cdot\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sqrt{[1+|\cos(\theta_1+\theta_2)|][1-|\sin(\theta_1+\theta_2)|]}}\cdot\frac{S_0}{\eta} \tag{33}$$

明らかに式 (32) より大きく，これは2本の伝送路を使用したことによる利得である．

3.2 雑音スペクトル特性

各伝送路雑音相互に相関があると，それを利用して出力雑音を減らすことができる．直列伝送では，これは雑音スペクトルの形を利用した受信フィルタに相当する．前と同様，以下情報内相関はなく重みも均一であるとし，また無ひずみ条件を入れた場合について考える．

○出力 SNR を均一にした場合

伝送特性を理想的とすると

$$W=\eta Q \tag{34}$$

である．出力 SNR を均一にするようなマトリクス変換を用いるとすれば，その出力 SNR は式 (29) で与えたとおりである．よって出力 SNR は行列 Q の固有値のうち小さい k 個の和のみで定まる．伝送路数 m が情報数 k より大きい場合はマトリクス変換を施こすことにより雑音相互の相関を利用して出力 SNR を改善できるが，$m=k$ の場合は

$$\sum_{j=1}^{k} w_j = \frac{1}{\eta}\,\mathrm{tr}\,Q,\ (m=k) \tag{35}$$

が成立し，右辺は全受信雑音電力に比例するので，スペクトルの形を利用してもこの場合利益はない．

○雑音相関特性例

伝送路行列として無減衰の

$$T=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix} \tag{36}$$

を用い，雑音相関行列としては

$$Q=\eta\begin{bmatrix}1 & \nu\\ \nu & 1\end{bmatrix} \tag{37}$$

を用いた場合，他はすべて一様としたときの全出力対雑音比（平均 SNR）は $k=2$ としてつぎのようになる．

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_T = \frac{2(1-\rho^2)^2}{(1+\rho^2)[1-2\nu\rho+\rho^2+(1-\rho^2)\sqrt{1-\nu^2}]}\cdot\frac{S_0}{\eta} \tag{38}$$

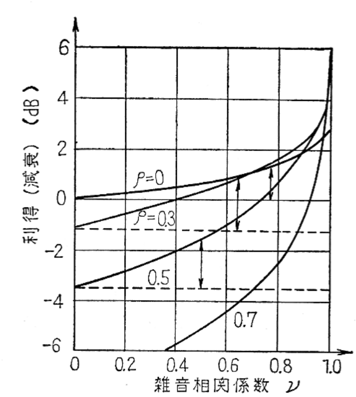

図 2　雑音相関と利得
（パラメータは相対干渉率）
Fig. 2—Gain vs. correlation coefficient of noise.

この数値計算結果を図2に示す．横軸は雑音の相関係数 ν，パラメータは相対干渉率 ρ である．図中，各破線との差（矢印）が雑音相関による利得であって，縦軸は1伝送路当りの送信 SNR, S_0/η からの利得を示し，$\nu=0$ のところがチャネル干渉のみによる劣化を与えている．

伝送チャネル数 m が情報数より大きくなると，雑音相関によるシステム利得はさらに大きくなる．物理的に言うとこれは，全伝送路の雑音が同じものならば受信各出力の差を取ることにより雑音は相殺されるということを意味している．

3.3 情報内相関特性

○一般的性質

情報内相関のみの性質を調べる意味から，R 以外の特性行列 T, Q, Φ, Ψ はいずれも単位行列に相似と

する．このとき，固有値行列 R_0 の対角要素を大きい順に番号付けておけば

$$g_i=\rho_i \tag{39}$$

である．また，m と k の大小関係を自由にして調べる意味から，無ひずみ条件を入れない最適行列を用いることにする．したがって最適性の評価はひずみや干渉および雑音など，すべてを含めた誤差電力を最小にするものである．簡単のため，全出力に含まれる全誤差電力 N_T を例にとると，式 (23)，(24) よりつぎのようになる．

$m\geqq k$ のとき

$$N_T=\sum_{i=1}^{k} N_i=\left(\frac{\sigma^2\eta}{P_s+k\,\eta}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\rho_j}\right)^2 \tag{40}$$

$m<k$ のとき

$$N_T=\left(\frac{\sigma^2\eta}{P_s+m\,\eta}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\rho_j}\right)^2+\sigma^2\left(\sum_{j=m+1}^{k}\rho_j\right) \tag{41}$$

全出力対全雑音比は上式を用いて

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_T=\frac{\sigma^2}{N_T}\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right) \tag{42}$$

となる．

$m\geqq k$ の場合，1 情報当りの送信電力を S_0' として 1 情報当りの送信 SNR からの利得はつぎのようになる．

$$\mathrm{Gain}=k\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\rho_j}\right)^{-2} \tag{43}$$

Schwartz の公式から明らかなように，これは

$$1\leqq \mathrm{Gain}\leqq k \tag{44}$$

の範囲内にある．すなわち，情報相互に相関があると，それを利用して必ず利得が得られるが，その大きさはたかだか k である．この上限はちょうど一つの情報を全電力で伝送するのと等価である．

逆に $k>m$ の場合，これは帯域圧縮に相当し，これについては次章で述べる．

○数値例

上述の解析に対する数値結果は後に与えるとして，ここでは無ひずみ条件を入れ，さらに雑音相関も加味した結果を示そう．このときの全出力の平均 SNR は式 (40) と同様にして導くことができ，

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_T=\frac{kS_0'}{\eta}\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right)/\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{w_j\rho_j}\right)^2 \tag{45}$$

となる．$m=3$ とし，Q, R として

$$Q=\eta\begin{bmatrix}1 & \nu & \nu\\ \nu & 1 & \nu\\ \nu & \nu & 1\end{bmatrix},\quad R=\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho\\ \rho & 1 & \rho\\ \rho & \rho & 1\end{bmatrix} \tag{46}$$

のような行列を取ったとき，この伝送路で 3 個または

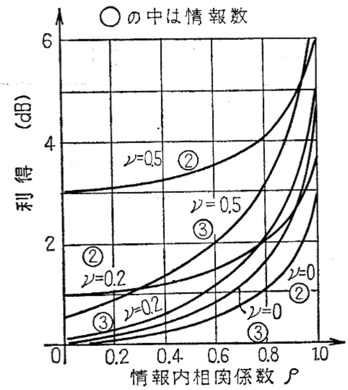

図 3　情報内相関と相関利得
(パラメータ ν は雑音相関係数)
Fig. 3—Gain through correlation vs. correlation coefficient of information.

2 個 (R は上式を二次元に縮少) の情報を伝送する場合の SNR を計算したのが図 3 である．いずれも横軸に情報内相関係数 ρ をとり，パラメータは雑音相関係数 ν，情報数 k，縦軸は送信 SNR (1 情報当り) S_0'/η よりの利得を示したものである．

4．マトリクス変換の応用

この章では，マトリクス変換を用いる幾つかの応用——符号間干渉補償方式，等化フィルタ，漏話補償，情報スペクトルと帯域圧縮等——について述べるが，このうち前の二つはいわゆるタップ付のアナログ遅延線と重み回路で構成することのできるトランスバーサルフィルタであり，特に目新しい方式ではない．しかしこのようなマトリクス変換の手法を用いるとより統一的に扱いうる他，各出力に応じた重み (送信側の重みも同時に) を考慮できるという特長を持つことになる．たとえば PCM の MSD から LSD に至る各ディジットの重みを復調時に考慮すれば，各ディジットを独立に復調するよりもより良い出力を得ることができる．

4.1　直列パルス伝送の符号間干渉補償方式

成分が 1 または 0 の k 次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ を k 個の複流パルスにより伝送することを考える．受信パルスの波形を図 4 のようにすると，パルス波形の広がりが他パルスに干渉を与えるが，いま k 個のパルスブロックの前後からの影響はないものとする．またパルス情報相互の相関はなく，雑音も白色で定常，かつ送信電力・受信出力の重み ψ, Φ を一様と考え，無ひずみ条件を課し他パルスからの干渉が零となるようマトリクス構成を行なうものとする ($k=m$)．

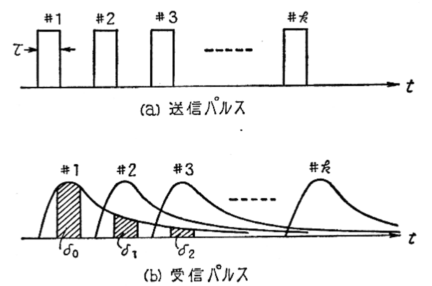

図 4 送受信パルス波形
Fig. 4—Waveforms of transmitting and receiving pulse.

以上の仮定において k を十分大きくすれば近似的に定常的伝送とみなすことができる．雑音の電力密度（片側）を N_0 Watt/Hz とし，パルス幅が τ の方形パルスを考えれば，1パルスのエネルギーを E として

$$\eta = N_0\tau/2 \tag{47}$$

$$P_S = k\tau E \tag{48}$$

である．したがって，任意の伝送路におけるマトリクス変換後出力パルスの SNR はつぎのようになる．

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_i = \frac{2E}{N_0}\cdot k\left(\sum_{j=1}^{k} w_j\right)^{-1}$$

上式中，右辺第1項を除いたものがマトリクス補償後の劣化一般解を表わしている．

伝送路行列 T については，後続パルスから先行パルスへの干渉は少ないのでこれをいま無いものとし，つぎのような三角行列を仮定する．すなわち3タイムスロット以上離れたパルスからの干渉はないものとする．しかし一般にそれらが存在しても最終的な解は求めることができる．

$$T = \begin{bmatrix} \delta_0 & & & & \\ \delta_1 & \delta_0 & & 0 & \\ \delta_2 & \delta_1 & \delta_0 & & \\ & \delta_2 & \delta_1 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{49}$$

このとき，干渉補償後の SNR を計算すれば，詳しい導出は省くがつぎのようになることが示される．

すなわち，

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta &= \epsilon_1 = \delta_1/\delta_0 \\ \alpha\beta &= \epsilon_2 = \delta_2/\delta_0 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

によって α, β および ϵ_1, ϵ_2 を定義すると，補償後の SNR は α, β で表わされ，さらに $k\to\infty$ として直列伝送に持ってゆくとこれはある極限値に収束する．

こうして補償後パルスの SNR は

$$\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}}\right) = \frac{(1-\epsilon_2)(1+\epsilon_2-\epsilon_1)(1+\epsilon_2+\epsilon_1)}{(1+\epsilon_2)}\,\delta_0{}^2\cdot\frac{2E}{N_0} \tag{51}$$

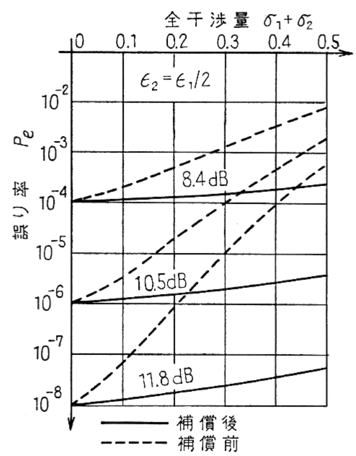

図 5 マトリクス変換による干渉補償効果
（パラメータは $2E/N_0$）
Fig. 5—Compensating effect by matrix conversion.

と求まる．上式中 $\delta_0{}^2$ は波形の広がりによって生じる等価的受信エネルギーの減衰を示し，第1項が干渉による補償後劣化を示している．

$\epsilon_2=0.5\epsilon_1$ とした，二進パルス伝送の誤り率の計算結果を図5に示す．図中横軸が規格化全干渉量 $\epsilon_1+\epsilon_2$，縦軸が誤り率であり，破線は補償前の誤り率である．実際上，この補償回路は図6のように構成される．すなわち，幾つかの重み付け回路と遅延線とよりなるフィルタである（ただし $\Delta\tau$ はパルス繰返し周期）．

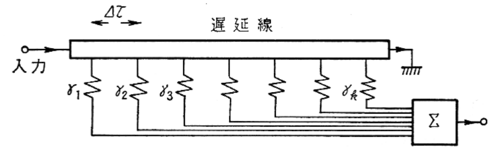

図 6 タップ付遅延線による等化フィルタ
Fig. 6—Equalizing filter by tapped delay line.

4.2 波形伝送の等化フィルタと漏話補償

伝送路特性に対処した送受信側での等化にマトリクス変換を用いる場合，その回路は前節と同じく図6のようになる．遅延線の長さが十分長くまたタップ数が十分多ければこれは普通のアナログフィルタと同様な働きをする．

○最適等化フィルタ

波形を $\Delta\tau$ 間隔でサンプルし，その値を $x_1, x_2, \cdots, x_k$ としてこれで送信ベクトルを構成する．送信側のフィルタは考えず，受信フィルタのみを考えると $m=k$，$A=I_k$ である．また波形伝送であるから前の解析のうち無ひずみ条件の入らない場合がこれに対応

し，最適受信行列は前論文[1]式 (57) より

$$D=R^tT(Q+TR^tT)^{-1} \tag{52}$$

として与えられる．たとえば $t=i\,\varDelta\tau$ における最適平滑出力 y_i は，行列 D の第 i 行ベクトル ${}^t\boldsymbol{d}_i{}^*$ を用いて

$$y_i={}^t\boldsymbol{d}_i{}^*\boldsymbol{r} \tag{53}$$

のように与えられる．したがってこのときの遅延線の重み $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k$ はつぎのようになる．

$$\gamma_j=d_{ij} \quad j=1,2,\cdots,k \tag{54}$$

いまタップ間隔を十分狭くすると，これがいわゆる最適受信フィルタになることは以下のようにして示すことができる．すなわち，まず時間関数 $d(t_1, t_2)$ を

$$d_{ij}=d(i\,\varDelta\tau,\ j\,\varDelta\tau)\cdot\varDelta\tau \tag{55}$$

にて定義し，受信波形を $r(t)$ とすれば式 (53) から出力波形はつぎのようになる ($\varDelta\tau\rightarrow 0$)．

$$y(t)=\int d(t,\tau)\cdot r(\tau)d\tau \tag{56}$$

同じく行列の積も積分形に表わすことができ，したがって式 (52) より得られる関係式 ($\boldsymbol{\rho}_i{}^*$ は行列 R の第 i 行ベクトルの縦ベクトル)

$$T\boldsymbol{\rho}_i{}^*=(Q+TR^tT)\boldsymbol{d}_i{}^* \tag{57}$$

を連続形に直すと，伝送路のインパルス特性，情報波形の相関関数，雑音相関関数，受信フィルタのインパルス応答をそれぞれ，$t(\ )$，$\rho(\ )$，$q(\ )$，$d(\ )$，で表わすときつぎのような関係式を得る．

$$\int t(t_1,\tau_1)\rho(t_2,\tau_1)d\tau_1=\int\{q(t_1,\tau_1)+\int d\tau_2\int t(t_1,\tau_2)\rho(\tau_2,\tau_3)t(\tau_1,\tau_3)d\tau_3\}d(t_2,\tau_1)d\tau_1 \tag{58}$$

上に用いた関数はすべて 2 変数関数であるが，定常的な場合は 2 変数の差のみの関数になる．このとき，上式をフーリエ変換すれば，受信フィルタ $D(\omega)$ として

$$D(\omega)=\frac{T^*(\omega)R(\omega)}{Q(\omega)+T^*(\omega)R(\omega)T(\omega)} \tag{59}$$

が得られる．

上式の形から明らかなように[3]，これは伝送路の周波数特性，雑音電力スペクトル，送信波形の電力スペクトルが与えられた場合に出力の平均誤差電力を最小とするフィルタである．

○線間漏話補償

マトリクス変換には他に単なるフィルタでは実現できない特長がある．それは多条ケーブルを用いて伝送する場合のように線間の漏話が問題となる場合である．マトリクス変換による漏話補償は，送受信両側で行なう場合と受信側だけで行なう場合とが考えられるが，いずれにせよ用いるマトリクスは図 7 のように構成する．すなわちまず λ 線 m_1 本おのおのからの入力波を遅延線に通し，幾つかのタップ (m_2 個) から合計 $m_1\times m_2$ 個のアナログ出力を得る．これらのアナログ出力をつぎに同図 (b) のような重み付け回路に通せば一つの最終等化出力 (cf. $\#l$) となる．最終出力は送信情報数だけあるから，各情報出力に対しておのおの異なった重み付け回路 (b) が存在する．このとき入線 $\#l$ からの成分に対する重み付け回路 $\gamma_{1l}\gamma_{2l}\cdots\gamma_{m_2l}$ が各伝送路内での伝送波形の広がりによる干渉補償回路に相当し，これは伝送路が一本の場合の通常の等価回路である．一方，他の入線からの成分に対する重み $\gamma_{ij}(j\neq l)$ は他伝送路からの漏れに対する補償で，これがここで特徴的な項である．図では $\gamma_{ij}(i=1,\cdots m_2)$ は $\#j$ 入線からの漏話に対する補償を表わしている．

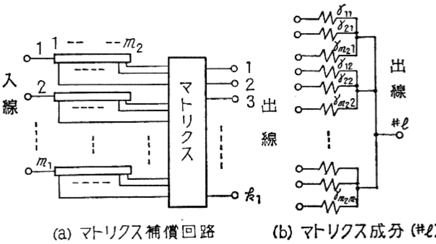

図 7 マトリクス変換による漏話補償回路
Fig. 7—Compensating circuit of interference by matrix conversion.

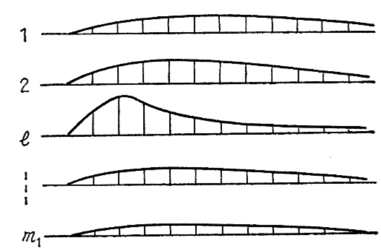

図 8 インパルスの各線路への洩れ
(#l にインパルスそう入)
Fig. 8—Crosstalk of impulse to each parallel transmission line.

以上のようにマトリクスを用いる場合，伝送路行列 T の成分はつぎのようなものになる．すなわち，いま $\#l$ 伝送路にのみインパルスを送り込んだとし，その受信波形が図 8 のようだったとすると，この受信波形を $\varDelta\tau$ で区切った各サンプル値が T の成分になる ($l=1,2,\cdots,m_1$)．$\#l$ チャネル以外のチャネルに出る

波形は“相互インパルス応答”とでもいうべきもので，これが線間漏話成分である．

4.3 情報スペクトルと帯域圧縮

マトリクス変換のモデルでは $m<k$ となる場合が情報帯域圧縮に相当する．この場合は無ひずみ条件を満たすことができないので，この条件を入れない場合のマトリクス変換を用いねばならない．

送受信重み均一，かつ伝送路が理想的で雑音も白色（無相関）の場合，得られる全信号対雑音比は，式(41) よりつぎのようになる．

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_T=\left(\frac{P_s}{\eta}+m\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\rho_i\right)\cdot\left[\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\rho_j}\right)^2+\left(\frac{P_s}{\eta}+m\right)\left(\sum_{j=m+1}^{k}\rho_j\right)\right]^{-1} \tag{60}$$

上式中，第3項の後半がこの場合に特有の項であって，これが主として帯域圧縮の特性を定める．たとえば伝送路 SNR が十分大きい場合はほぼ

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_T=\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right)\left(\sum_{j=m+1}^{k}\rho_j\right)^{-1} \tag{61}$$

となり，これは平均出力 SNR の上限である．$\{\rho_j\}$ は送信情報ベクトル $\boldsymbol{X}$ の相関行列の固有値で，大きい順に並べたものであるから，送信情報に冗長なものがあれば小さい $k-m$ 個の固有値は十分小さくなり，したがってこの出力 SNR もかなり大きくなる．すなわち情報数より伝送チャネル数のほうが小さくても十分 SNR の高い復元が可能となる．しかし，逆に送信情報がすべて独立ならば固有値 $\{\rho_i\}$ はすべて1に等しく，出力平均 SNR は $k/(k-m)$，すなわち独立な情報は伝送チャネル数以上伝送できない．

いま，情報として波形伝送を考える．このとき情報内相関行列はその波形の自己相関関数 $\phi(\tau)$ によって与えられる．周期 T_s で波形を k 回サンプルし，x_1 $x_2\cdots x_k$ とすればこれらの間の相関は

$$E_x\{x_ix_j\}=\rho_{ij}=\phi[(i-j)T_s] \tag{62}$$

で，これによって相関行列 R が定まる．たとえば一例として送信波形の電力スペクトルが一次高域しゃ断形の場合を取ると，この相関関数はつぎのようになる．

$$\phi(\tau)=\sigma^2\cdot\exp(-\omega_a|\tau|) \tag{63}$$

これを用いて伝送チャネル数 m 対出力 SNR の関係

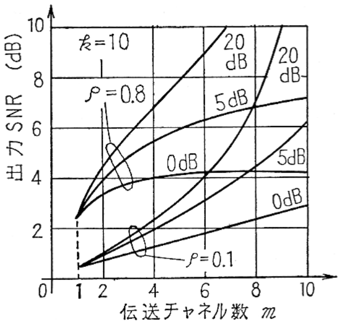

図9 伝送チャネル数と出力 SNR
（相関係数 $\rho=e^{-\omega_aT_s}$，パラメータは伝送路 SNR(dB)）

Fig. 9—Out-put SNR vs. number of transmitting channel.

を示したのが図9である．図中パラメータは伝送チャネルの SNR と，相関係数 $\rho=\exp(-\omega_aT_s)$ である ($k=10$)．

5．結論および問題点

本論文では，前に発表[1]したマトリクス変換方式をさらに拡張した一般解を示すとともに，マトリクス変換の特性およびマトリクス変換の応用等について述べた．

今後の問題としては，連続波にマトリクス変換を適用する場合の詳しい特性，たとえば有限で打切ることの効果などを調べたり，また現実問題として回路構成する場合の検討などが残されている．画像伝送の普及が始まろうとしている今日，このマトリクス変換は線路を有効に利用して，良好な伝送特性を与える方式の一つとして有効ではないかと考える．

謝辞 本研究にあたりご指導いただいた本学尾佐竹徇教授，並びにご討論，ご示唆いただいた秋山稔助教授に感謝する．

文献

(1) 尾佐竹，田中：“最適通信方式一マトリクス変換による伝送路と情報の整合問題”，信学論 (A)，**52-A**，12，p. 513 (昭 44-12)．
(2) 尾佐竹，田中：“最適マトリクス変換による伝送路と情報の整合方式”，昭 45 連大，2144．
(3) J.B. Thomas: “An introduction to statistical communication theory”, John Wiley & Sons, Inc., New York, p. 222, 式 (5.11-6) (1969).

(昭和 45 年9月5日受付)