

アナログフィードバック伝送によるデジタル情報の伝送方式

尾佐竹 徇 田中 英彦

あらまし デジタル情報の伝送方式として、送るべき情報をアナログ量に直し一種の情報フィードバックを行ないながらそのアナログ値を伝送し受信側では得たアナログ量を A-D 変換して元のデジタル情報を求める方式を提案し、これについて解析を行なった。帰還路に雑音がない場合は、順方向路の伝送容量に等しい伝送速度で、かつ誤り率の幾らでも小さい伝送が可能であり、またそれも送受信機のメモリを増すだけで、他になんら変更なく誤り率を下げるができるものである。

1. ま え が き

データ伝送は現在大切な通信の一つであるが、今後ともさらに重要性を増しその占める比重は増加の歩をたどるであろう。誤り率の小さいことが必要な場合は現在でも返送照合とか ARQ 等のフィードバック方式が用いられており、これらは簡単でしかもかなり高品質伝送が可能なものである。また用いる符号についても種々提案され検討も行なわれているが、かなり複雑で伝送速度もそのため普通減少するものである。

ここに提案する方式は、まずデジタル量をアナログ量に直しアナログフィードバック伝送方式を用いてそれを伝送し、受信側では得たアナログ量を A-D 変換（符号化）して元のデジタル量を求めようとするもので、帯域は狭くまた誤り率も自由に取ることができる。またアナログフィードバック伝送方式は一種の情報フィードバックを行ないながらアナログスカラー値を伝送する方式で、伝送路雑音によって送信信号を変える適応通信方式ともみなすことができる。これと同種の方式については最近 Schalkwijk⁽²⁾ がまた別な観点から考察を試みている。

機器が発達し伝送路としてもかなり特性の良いものが得られる現在、伝送路にアナログ量を用いる方式も再検討の余地があるように思われ、本文ではまずアナログフィードバック方式を解析してその SNR 特性を求め、つぎにこの伝送方式を用いてデジタル量を伝送する方式について述べてゆこうと思う。

2. アナログフィードバック伝送方式

2.1 方式モデル

図 1 は、スカラー量 x_0 ($\bar{x}_0=0, \bar{x}_0^2=\sigma^2$) をできるだけ SNR 良く受信側に伝えるためのアナログフィードバック伝送方式モデルである。添字 m は伝送の回数を示し、また記号はつぎのとおりである。

- \mathcal{S}_m, p_m : それぞれ順, 逆方向路の送信信号
- r_m, q_m : " の受信信号
- n_{1m}, n_{2m} : " の加算雑音
- y_m : m 回伝送後受信側における x_0 の推定値
- x_m : " 送信側における y_m の推定値
- S_1, S_2 : 順, 逆方向の送信電力
- N_1, N_2 : " の雑音電力

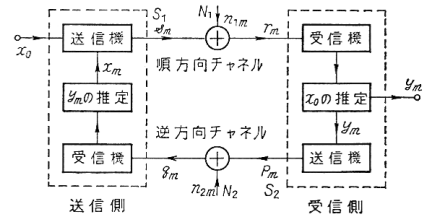


図 1 アナログフィードバック方式
Fig. 1—Analogue feedback transmission system.

伝送第 1 回目は送るべきスカラー値 x_0 で定まる値 $\mathcal{S}_1(x_0)$ を送信し、順方向伝送路でこれに雑音 n_{11} が加わって受信される。受信側ではこの受信波から x^0 を推定しそれを y_1 として記憶し y_1 で定まる値 $p_1(y_1)$ を帰還路により送り返し、送信側では一般にこれに雑音 n_{21} が加わって受け取られる。送信側ではこの受信値と x_0 とから y_1 を推定し推定値を x_1 として第 2 回目の伝送信号 \mathcal{S}_2 を x_0 と x_1 とから定める。以下これを繰り返すわけである。上述のモデルでは送信

尾佐竹徇, 田中英彦: 正員 東京大学工学部電気工学科
Digital Information Transmission by Analogue Feedback System. By TONAU OSATAKE and HIDEHIKO TANAKA, Members (Faculty of Engineering, University of Tokyo, Tokyo).
論文番号: 昭 44-300 [B-117]

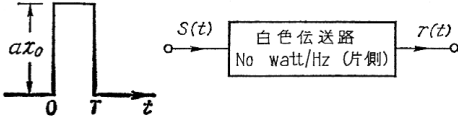


図 2 PAM の伝送
Fig. 2—Transmission of a PAM pulse.

波、雑音にスカラ値を用いており、時間関数としていないが、これは現実の伝送路で用いる変調方式を特に仮定していないためであってどんな変調方式でも復調出力は変調信号に雑音（その性質は問わない）の加わったものとして表わされ、特に今のモデルでは変調信号がスカラであるからすべてをスカラで表わすことが可能である。たとえば図2のように変調として PAM を用い白色雑音が伝送路で加わるものとする、受信側で同期積分復調すれば、その出力 r_0 はつぎのようになる。

$$r_0 = \int_0^T r(t) dt = \int_0^T \{S(t) + n(t)\} dt \quad (1)$$

$$= aT \cdot x_0 + n_0 \quad (2)$$

$$\bar{n}_0^2 = N_0 T / 2 \quad (3)$$

また、送信信号 \mathcal{S}_m , p_m , スカラ推定値 x_m , y_m 等の関係を与える関数はすべてパラメータの線形結合とする。方式解析の要点は、送信電力制限のもと関数としてどのような線形結合を用いたとき、伝送回数 m に対して出力 SNR がどう変化するかということである。

2.2 帰還路に雑音のない場合

まず帰還路に雑音を含め場合について考察する。最初に簡単な一例を示しつぎに最適化を行なう。

① 簡易フィードバック方式

送信電力は常に一定とし、送信信号や推定値などの関係としてつぎのような簡単なものを考える。

$$\mathcal{S}_m = a_m(x_0 - x_{m-1}), \text{ただし } \mathcal{S}_1 = a_1 x_0 \quad (4)$$

$$r_m = \mathcal{S}_m + n_{1m} \quad (5)$$

$$y_m = y_{m-1} + d_m r_m \quad (6)$$

$$p_m = y_m = q_m = x_m \quad (n_{2m} = 0) \quad (7)$$

いま、第 $m-1$ 回の伝送が済み第 m 回目伝送を考えると、受信側の出力雑音を n'_{1m-1} として

$$x_{m-1} = y_{m-1} = x_0 + n'_{1m-1} \quad (8)$$

$$\mathcal{S}_m = -a_m n'_{1m-1} \quad (9)$$

であって、これに順方向路雑音 n_{1m} が加わり r_m として受信されるから第 m 回目の推定値 y_m は、

$$y_m = x_0 + n'_{1m-1} - d_m a_m n'_{1m-1} + d_m n_{1m} \\ = x_0 + n_{1m}' \quad (10)$$

したがって第 m 回伝送後の雑音電力 U_m はつぎ

のようになる。

$$U_m = \bar{n}_{1m}'^2 = (1 - d_m a_m)^2 \cdot U_{m-1} + d_m^2 \cdot N_1 \quad (11)$$

m 回目送信信号の電力条件から a_m は定まり、

$$a_m^2 U_{m-1} = S_1 \quad (12)$$

ゆえに U_m は d_m のみの二次式であるから最小値が存在しそれを求めると第 m 回目の SNR はつぎのようになる。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_m = \frac{\sigma^2}{U_m} = \left(1 + \frac{S_1}{N_1}\right) \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{m-1} \quad (13)$$

また第 1 回目の SNR は S_1/N_1 であるから一般に

$$\left(\frac{S}{N}\right)_m = \left(1 + \frac{S_1}{N_1}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{S_1}{N_1}\right) \quad (14)$$

が成立つ。すなわちこの方式の SNR は伝送回数 m のべきに比例して改善される。

② 最適フィードバック方式

もう少し一般的に帰還路が無雑音である場合を取扱おう。送信信号、推定値の関数として次式を用いる。

$$\mathcal{S}_m = a_m x_0 + b_m x_{m-1} \quad (15)$$

$$y_m = c_m y_{m-1} + d_m r_m = x_m \quad (16)$$

r_m に $\mathcal{S}_m + n_{1m}$ を代入すると、

$$y_m = (c_m + d_m b_m) y_{m-1} + d_m a_m x_0 + d_m n_{1m} \quad (17)$$

これは漸化式であるからつぎのように解ける。

$$y_m = Q_m \cdot x_0 + R_m \quad (18)$$

ただし、 Q_m , R_m はつぎのようなものである。

$$Q_m = \sum_{i=1}^m D_m G_i a_i \quad (19)$$

$$R_m = \sum_{i=1}^m D_m G_i n_{1i} \quad (20)$$

$$D_i = \begin{cases} \prod_{j=2}^i (c_j + d_j b_j) & i > 2 \\ 1 & i = 1 \end{cases} \quad (21)$$

$$G_i = d_i / D_i \quad (22)$$

送信電力には 1 回ごとと同じという制限を付けず、 m 回の伝送電力の総和を一定 P_s としておこう。したがって、

$$P_s = \sum_{i=1}^m [(a_i + b_i Q_{i-1}) x_0 + b_i R_{i-1}]^2 \quad (23)$$

ベクトルを用いればつぎのように表わされる。(付録 1) $P_s = \sigma^2 \cdot {}^t \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a} + N_1 \cdot \text{tr}({}^t T_0 T_0)$ (24)

ただし、 $\text{tr}(\cdot)$ は対角成分の和を示し、添字 t は転置を示す。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad T_0 = \begin{pmatrix} t_{21} & & & 0 \\ t_{31} & t_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{m,m-1} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$t_{i+1,j} = b_{i+1} D_i G_j \quad (t_{ij} = 0, i < j) \quad (26)$$

また、行列 M は対称行列であってつぎのようなものである。

$$M = {}^t T_1 T_1 \quad (27)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ t_{21} & 1 & & & \\ \vdots & t_{31} & t_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

さて m 回伝送後の雑音電力 U_m は、ベクトル \mathbf{G} (成分 G_i) を用いると R_m からつぎのようになり、

$$U_m = \bar{R}_m^2 = N_1 \cdot D_m^2 ({}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) \quad (29)$$

規格化条件より $Q_m = 1$ であるから

$$D_m \cdot ({}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}) = 1 \quad (30)$$

$$\therefore U_m = \frac{N_1 \cdot ({}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{G})}{({}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{a})^2} \quad (31)$$

となる。以上より電力条件式(24)の下、雑音電力 U_m を最小にするのが最適フィードバック方式である。ベクトル \mathbf{G} , \mathbf{a} に関して最適化を行なうとつぎのようになることが示される (付録2 参照)。

$$U_m = \frac{\sigma^2 N_1 \nu_1}{P_s - N_1 \cdot \text{tr}({}^t T_0 T_0)} \quad (32)$$

ただし、 U を単位行列とすると ν_i はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nu_i &= M_{in} \{ \nu_i \} \\ \det(\nu_i U - M) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

一方、行列 T_0 , M の定義式から

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}({}^t T_0 T_0) &= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=j+1}^m t_{ij}^2 \\ \text{tr}(M) &= \sum_{j=1}^{m-1} \left[1 + \sum_{i=j+1}^m t_{ij}^2 \right] + 1 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{tr}({}^t T_0 T_0) &= \text{tr}(M) - m \\ &= (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m) - m \end{aligned} \quad (35)$$

行列 M は式 (27) のような形で表わされるので m 次非負値対称行列⁽⁴⁾であり、固有値 $\nu_i (i=1, 2, \dots, m)$ はすべて正の実根である。ゆえに

$$\nu_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (36-1)$$

また T_1 の対角成分はすべて1であるから

$$\det(M) = (\det {}^t T_1) \cdot (\det T_1) \quad (36-2)$$

$$= \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m = 1 \quad (36-3)$$

となる。行列 T_0 の成分は全く自由に取りうるので m 個の固有値に課せられる条件は上の二条件のみである。この条件の下に雑音電力式 (32) を最小にすればよい。まず m 個の固有値の和が一定であるという条件をさらにつけて雑音電力 U_m を最小 (すなわち最小固有値の最小を求める) にし、その後 m 個の根の和を自由に動かして、またその中の最小を取ればよいわけである。さて m 個の根の和 (ω) が一定という条件をつけたとき、最小固有値 ν_1 が最小になるの

はつぎのような場合である (付録3)。

$$\nu_2 = \nu_3 = \cdots = \nu_m (\equiv \nu_1) \quad (37-1)$$

したがって上式を ν とおけば、条件より

$$\nu_1 = 1/\nu^{m-1} \quad (37-2)$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m = (m-1)\nu + 1/\nu^{m-1} \quad (37-3)$$

これを雑音式 (32) に入れると、つぎのようになる。

$$U_m = \frac{N_1 \sigma^2}{[P_s \nu^{m-1} - (m-1)N_1 \nu^m - N_1]} \quad (38)$$

ν は1より大 ($\nu_1 < \nu_2$ より $\nu > 1$) であって、この範囲の下での U_m の最小 (分母最大) 値は U_m の分母を微分することにより (最小の証明は付録4 参照)、

$$\nu = 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{P_s}{N_1} \quad (39)$$

の場合であってその値はつぎのようになる。

$$M_{in} \{ U_m \} = \sigma^2 \left[\left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{P_s}{N_1} \right)^m - 1 \right]^{-1} \quad (40)$$

ゆえに m 回最適フィードバックを行なった後の SNR はつぎのようになることが示された。

$$\left(\frac{S}{N} \right)_m = \frac{\sigma^2}{U_m} = \left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{P_s}{N_1} \right)^m - 1 \quad (41)$$

2.3 帰還路に雑音がある場合

帰還路に雑音があると一般的な解析はかなりむずかしいのでここでは1例について解析を行なう。送信信号、推定値の関係としては前節②で与えたものを用い、変るところはおのおのの定数 (a_m, b_m etc) と、帰還路の信号が

$$p_m = \alpha_m y_m \quad (42)$$

$$q_m = p_m + n_{2m} \quad (43)$$

$$x_m = \tau_m q_m \quad (44)$$

となることである。今、 y_{m-1} として

$$y_{m-1} = x_0 + n'_{1m-1} \quad (45)$$

$$U_{m-1} = \bar{n}_{1m-1}^2 \quad (46)$$

と置き y_m の雑音電力を求めると

$$U_m = (1 - a_m d_m)^2 U_{m-1} + b_m^2 d_m^2 \tau_{m-1} N_2 + d_m^2 N_1 \quad (47)$$

であり、電力条件は順、逆方向路についてそれぞれ

$$S_1 = (a_m + b_m)^2 \sigma^2 + b_m^2 \tau_{m-1}^2 N_2 + b_m^2 U_{m-1} \quad (48)$$

$$S_2 = \alpha_{m-1}^2 (\sigma^2 + U_{m-1}) \quad (49)$$

$$\tau_{m-1} \cdot \alpha_{m-1} = 1 \quad (50)$$

したがって条件式 (48), (49) (50) のもと U_m を最小にすれば、 m 回フィードバックを行なった後の SNR と $m-1$ 回の SNR との関係はつぎのように求まる (付録5)。

$$\left(\frac{S}{N} \right)_m = \left[1 + \frac{(S_1/N_1) \cdot (S_2/N_2)}{(1 + S_1/N_1) \{ 1 + (S/N)_{m-1} \} + S_2/N_2} \right]$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{m-1} + (S_1/N_1) \quad (51)$$

$m=1$ での SNR は (S_1/N_1) であるから、これですべての m について解けるわけである。

つぎに特殊な 2 例について考察しよう。

① S_2/N_2 が十分大きいとき

帰還路の SNR が順方向路 SNR より遥かに大きいと、

$$\left(\frac{S}{N}\right)_m \doteq \left[1 + \frac{S_1}{N_1}\right] \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{m-1} + \left(\frac{S_1}{N_1}\right) \quad (52)$$

したがってこの漸化式を解くことにより解が得られる。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_m \doteq \left(1 + \frac{S_1}{N_1}\right)^m - 1 \quad (53)$$

前節で得た最適フィードバック（帰還路雑音なし）方式において、 $P_s = mS_1$ であるからこれを入れると、上式は同じ SNR を示していることが解る。前節では 1 回ごとの送信電力が一定という条件を付けなかったがそれにもかかわらずここで与えた方式（毎回等電力）と SNR が等しいということは、毎回一定電力で送るのが最適であることを示している。

② $S_1/N_1 = S_2/N_2 \gg 1$ のとき

順、逆方向路で SNR が等しい場合、漸化式 (51) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_m &\doteq \left(\frac{S}{N}\right)_{m-1} + 2\left(\frac{S_1}{N_1}\right) \\ \therefore &\doteq 2(m-1) \cdot \left(\frac{S_1}{N_1}\right) \end{aligned} \quad (54)$$

すなわち、 m 回伝送後の SNR は伝送回数の 2 倍に比例し、帰還路 SNR が高い場合に比して改善は小さい。

いままでに述べた種々の方式の SNR 特性を掛けば図 3 のようになる。ただし帰還路に雑音のない場合、簡易方式と最適方式との間にグラフ上の差異は余りな

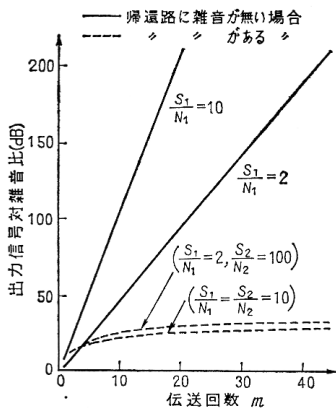


図 3 アナログフィードバック方式の伝送回数 m に対する出力 SNR の特性

Fig. 3—Out-put SNR vs. number of transmission times of analogue feedback systems.

い（伝送路 SNR が高い場合は特に）のでまとめて 1 本の曲線で示してある。

3. アナログフィードバックによるデジタル情報の伝送

3.1 方式とその原理

デジタル情報は一般に数列として表わされるが、その数列は一つのアナログ値に対応させることができる。たとえば一つの 2 進情報 101011... があつたときその左端に小数点をつけてこの情報を一つの 2 進小数とみなせば、無限に続くその数列は区間 $[0, 1]$ 内の 1 点を表わしている（図 4 参照）。デジタル情報を伝送することは結局このアナログ値 x を伝送することであるが、普通伝送路には雑音が存在しそのためアナログ値 x を 1 度送っても復調側ではあいまいさが残り完全に全デジタル量を得ることはできない。したがって普通のデジタル情報伝送では情報ビットおのおのを一つずつ送っており、その代わりになん度かアナログ伝送を続けていくことによってアナログ受信値の値を段々正確にしていっても同じことである。ここで提案する方式は、アナログ値 x の値を前述のアナログフィードバック伝送方式により送らうとするものであって伝送回数が増せばそれに応じて受信側の SNR は高くなり情報が送られてゆくわけである。図 5 は方式のブロック図である。

まず伝送路雑音を考慮して十分多くのデジタル情報をアナログ値 x に直し、なん度かのアナログフィードバック伝送を行ない x の SNR を高くしておいてから受信点ではデジタル情報の復調を行ない始め、それと同時に送信側においてもさらにデジタル情報をアナログ値に変換して x の精度を高めるとともに x の高位情報（より始めのビット）をすててゆく動作を繰り返す。DA 変換の速度は伝送路の情報伝送速度で定

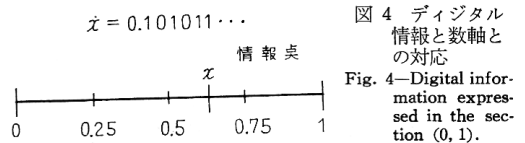


図 4 デジタル情報と数軸との対応
Fig. 4—Digital information expressed in the section (0, 1).

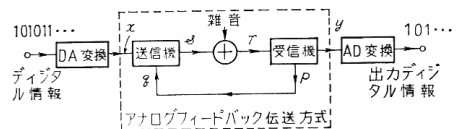


図 5 アナログフィードバックを用いたデジタル情報伝送方式
Fig. 5—Digital information transmission by the analogue feedback system.

まる。以下の解析では帰還路に雑音を含まない場合を例にとって考察を試みることにする。

3.2 情報伝送速度と誤り率

(1) 情報伝送速度

この方式の情報伝送速度を求めるため、いまアナログ値 x の値はデジタル情報を十分多く考慮することにより十分精密なものであるとしよう。また伝送遅延は次節での検討に残しここでは簡単のため、ないものとする。アナログフィードバック伝送をなん度か繰り返すと受信側における y の SNR はどんどん大きくなるが、ある SNR に達したところでなんディジットか情報判定すれば等価的に受信 SNR を幾らか下げることになる。アナログフィードバック伝送を一度行なうことにより得られる受信 SNR の向上と、ディジット判定による SNR 減少とが一致すれば常に均一品質の情報が入一定情報伝送速度で得られる。前章で述べたようにアナログフィードバック伝送を1度行なうことは、帰還路に雑音の無い場合 SNR を

$$\left(1 + \frac{S_1}{N_1}\right) + \delta \quad (55)$$

倍だけ増加させる。ただし $\delta > 0$ であって簡略方式①では $\delta = 0$ 、また最適方式では $\delta > 0$ であるが伝送回数 m を大きくすれば $\delta \rightarrow 0$ である。いま受信 SNR が

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{S_1}{N_1}\right) \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_M \quad (56)$$

に達したところで2進 k ビットの情報判定を行なったとすると、1ビット判定することは数直線図4を2倍の大きさに引き伸ばすこと（電力4倍）であるから*情報の品質が一定であるためには、

$$1 + \frac{S_1}{N_1} = 4^k \quad (57)$$

が必要であり、そのとき得られるデジタル情報はすべて SNR が $(S/N)_M$ 以上である。一方アナログフィードバック伝送を PAM で行っている場合を考え単独パルスの形として標準化関数を考えれば、伝送路帯域が B Hz のとき繰返周期 $T_s = 1/2B$ での干渉のない伝送が可能であるから順方向路の雑音密度を $N_0 \cdot \text{watt/Hz}$ として、この方式の情報伝送速度 R bits/Hz はつぎのようになる。

$$R = k/T_s \quad (58)$$

$$= B \log_2 \left(1 + \frac{S_1}{N_0 B}\right) \text{ bits/sec} \quad (59)$$

これは正しく Shannon の与えた伝送容量であり、したがってこの方式の伝送速度は順方向伝送容量いっぱいまで近づけることができる。

(2) 誤り率

いままでは SNR で論じてきたがアナログ情報をデジタル情報に直すとき必然的に誤り率が問題となり、それはこのアナログフィードバック伝送方式においては普通のパルス伝送と本質的に異なる性格を持っている。図6はアナログ送信情報 x と受信側におけるその分布関数 $f(y)$ とを示している。 y の分散 σ^2 は受信雑音電力であり y の平均はもし雑音が平均0なら x であって、アナログフィードバック伝送を繰り返すと分散 σ^2 が小さくなってゆく。情報点 x が図のような場合1ビットを判定すればその誤り率 P_e は図中斜線で示された面積により表わされる。ところが一般に分布関数の中心 x の位置は区間 $[0, 1]$ 内に分布しており（デジタル情報 1, 0 の出現確率が同じなら一様分布）したがって情報によって誤り率も異なることになる。たとえば情報ビットが

1000010101.....

のような場合 x は区間中 0.5 の近傍にあって分散 σ^2 が十分小さくない限り誤り率は大きくなってしまふ。よってこの方式では本質的に誤り率を維持する対策が必要であるが、たとえばスタッフパルスを用いる方法が考えられる。すなわちデジタル情報のなんビットかごとに1と0とを交互にそう入する。もしくは、情報のなんビットかごとにそのときの状況に応じて1か0かのパルスをそう入する。いま μ ビットごとに一つのスタッフパルスをそう入したとすれば、最悪の場合というのは図7のようなときである。したがって図6の境界値 0.5 と x との差は、

$$x - 0.5 \geq 2^{-\mu} + 2^{-2\mu} + \dots > 1/(2^\mu - 1) \quad (60)$$

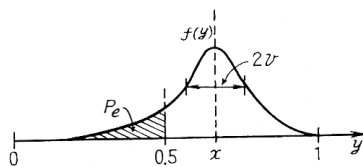


図6 y の分布関数と誤り率
Fig. 6—Probability density function of y , and error probability.

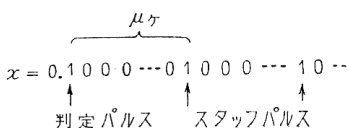


図7 最悪の情報パルス
Fig. 7—Digital information at the worst case.

* 雑音の混っているアナログ値をなんビットかに A-D 変換する場合、ビットごとの判定 SNR は低次のビットになるほど悪くなる。雑音の大きさを一定にして考えると、ビット判定後に判定レベルの幅が $1/2$ ずつ小さくなってゆくの SNR としては 6 dB (振幅が $1/2$ になるので電力としては $1/4$) ずつ減少するのと等価である。もちろん、これは前回のビット判定が正しかったことを仮定している。

であって、誤り率 P_e をうるためにはこの差が分散 v の η 倍なければならないとすると (ガウス雑音なら $P_e=10^{-6}$ で $\eta \doteq 3$).

$$\frac{1}{2^\mu - 1} > \eta v \quad (61)$$

また雑音の分散が v のときの SNR は、 x の大きさを 0.5 より測ることにすれば、

$$\left(\frac{S}{N}\right)_M = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{v^2} \quad (62)$$

したがってビット判定に必要な SNR はつぎのようになる。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_M > \frac{1}{12} \eta^2 (2^\mu - 1)^2 \quad (63)$$

上式で与えられる SNR を式 (56) に入れば判定を始めるまでに必要な SNR が得られ、この SNR をうるために必要なアナログフィードバックの伝送回数 m_0 は式 (41) から求められる。この m_0 回の伝送は情報伝送を始めるときのみ必要なものであって伝送を続けている間は関係ないものである。

また一度誤判定をすると誤りが波及する恐れがあるが 2 進符号としてたとえば Gray code を用いれば送信側の操作により波及を防ぐことができる。

3.3 遅延の対策と多重化

アナログフィードバックを行なうとき、一度伝送を行なうと帰還信号が戻ってくるまでつぎの伝送は不可能であって特に伝搬時間の長い場合はそれが問題になり送信側での信号変換に工夫を要する。いま片道伝搬時間を D 、信号処理時間を τ とするとき、伝送の時間間隔 T は

$$T = 2D + \tau \quad (64)$$

であり、1 回の伝送信号の幅 T_s はデジタル情報 k ビットに対応しそれは下式で与えられる。

$$T_s = 1/2 B \quad (65)$$

したがって元のデジタル情報を k ビットごとのタイムスロットに分割し、図 8 のように $\theta = T/T_s$ チャネル作ってそれらのチャネルを順に伝送すればよい。すなわち同じチャネル情報を順に並べたものを一つの送るべき情報とみなせばよいわけである。

つぎに伝送と DA 変換の時間関係について考える。送信始めに受信側で判定しないのでなん回か伝送を行なうが、前述の m_0 回は始めの x の値が十分詳しい値であることを仮定して求めたものであってそれが余り詳しくないときは等価的に伝送路 SNR が低くなるとみなせるからもっと大きくなる。したがって第 1 回目の伝送における信号の作り方は、伝送路雑音に比して量子化雑音が無視できる位までのビットを用いる必要

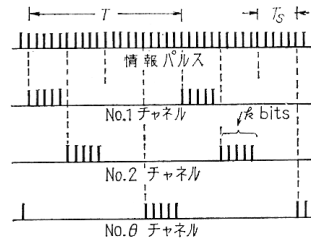


図 8 情報のチャネル分割
Fig. 8—Channel division of information.

がある。すなわち、 l ビットを用いるとすると

$$\frac{N_1}{S_1} = \frac{1}{4^{k-1}} \gg \frac{1}{4^l} \quad (66)$$

ゆえに送信始めの信号は k ビットずつのタイムスロットを幾つか (2~3) 取ってそれからアナログ値 x を作ればよく、2 回目からの伝送では伝送ごとに k ビットのタイムスロットを一つずつ増してアナログ値 x の値とする。 m_0 回伝送を行なった後に受信側では判定が始まるから、送信側に必要なシフトレジスタの数は

$$(m_0 - 1)k + l \text{ bits}$$

であり、したがって $l = \rho k$ ($\rho = 2 \sim 3$) とおくと伝送の時間関係は図 9 のようになる。すなわち左からデジタル入力が入って来、図の一つのブロックを k ビット

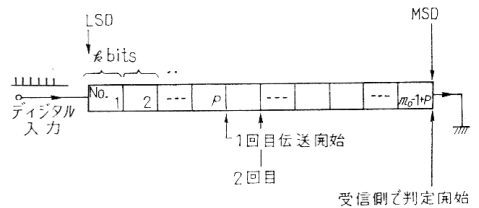


図 9 送信側のメモリ

Fig. 9—Memory at the transmitting side.

のシフトレジスタとすれば、No. ρ 番目のブロックがつまったときに伝送が開始され、以後 k ビット入ごとに 1 回伝送が行なわれる。任意の時刻におけるシフトレジスタはそのときの x の値を表わしている。受信側で判定が始まるのは m_0 回伝送後、すなわち No. $m_0 - 1 + \rho$ ブロックまでつまったときに送られる送信信号が受信側に受け取られたときであって、以後は送信側のシフトレジスタも伝送の行なわれる度に高位の k ビット (時間的に過去のビット) が消されてゆき新しい情報が取って代わるわけである。

以上では 1 伝送ごとに実質上送られているビット数 k が 1 以上であるとして考えて来たが、それは、式 (57) より

$$\frac{S_1}{N_1} > 4^l - 1 = 4 \text{ 8 dB}$$

のときであって、順方向 SNR がこれ以下の場合

$$\left(1 + \frac{S_1}{N_1}\right)^{k_0} = 4^{k_1} \quad (67)$$

与えられる k_0 回の伝送ごとに k_1 ビット復調すれば、以前と全く同様である。

4. これからの問題点およびむすび

ここで述べたアナログフィードバック伝送によるデジタル情報の伝送方式では任意の誤り率での伝送が送信側のメモリを少し増すだけで可能であり、それもまた順方向路伝送容量いっばいの伝送速度で可能である。伝送路の状態が時間的に変るような場合には受信側で判定の速度を加減すれば均一品質の伝送がある程度可能であるし、また種々の情報を種々の誤り率で伝送したいときもなら複雑な操作は要せず、ただ重要な情報は判定時間を遅らせることにより誤り率制御が可能である。また原理的には送信情報のデジタル列と受信判定後のデジタル列との時間関係は独立である。

しかし帰還路 SNR の影響や、誤り率対策用のスタッフパルス、誤り率の波及問題、ならびにアナログ伝送の同期等は今後検討を要する事柄である。

謝辞 ご討論いただいた本学秋山稔助教授、および研究室の藤井章氏に感謝する。

文 献

- (1) P.E. Green : "Feedback communication systems in lectures on communication system theory", Baghdad: New York; McGraw-Hill(1961).
- (2) J.P.M. Schalkwijk and T. Kailath : "A coding scheme for additive noise channels with feedback", Part I; No band width constraint, Part II Band limited signals", IEEE, Trans. IT-12: 2, p. 172 (April 1966).
- (3) N. Horstein : Sequential transmission using noiseless feedback", IRE Trans, IT-9, p. 136 (1963).
- (4) 佐武一郎 : 行列と行列式, 裳華房, p. 162 (昭 36).

付 録

1. 送信電力の行列表現

式 (23) に式(19) の $Q_{i-1}(m \rightarrow i-1)$ を代入すると

$$P_s = \sum_{i=1}^m [a_i + b_i D_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} G_j a_j]^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}^2 \cdot \bar{R}_i^2 \quad (A-1)$$

ただし、 $\bar{x}_0 = \sigma^2$, $\bar{x}_0 \bar{R}_i = 0$ を用いた。

さらに $n_{i+1} \cdot n_{i+1} = N_1 \delta_{ij}$ を用いて式 (20) を代入し、

$$t_{ij} = \begin{cases} b_i D_{i-1} G_j & i > j \\ 1 & i = j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad (A-2)$$

を用いると式 (A-1) はつぎのように表わされる。

$$P_s = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^i t_{ij} a_j \right)^2 \sigma^2 + N_1 \cdot \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} t_{ij}^2 \quad (A-3)$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m M_{jk} a_j a_k + N_1 \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} t_{ij}^2 \quad (A-4)$$

ただし、 M_{jk} はつぎのようなものである。

$$M_{jk} = \sum_{i=\max(j,k)}^m t_{ij} \cdot t_{ik} \quad (A-5)$$

成分が上式で与えられる行列 M はまたつぎのようにも表わすことができる。

$$M = {}^t T_1 T_1 \quad (A-6)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ t_{21} & 1 & & & \\ t_{31} & t_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \cdots & t_{m,m-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (A-7)$$

また式 (A-4) の第 2 項も行列で表現すれば

$$N_1 \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} t_{ij}^2 = N_1 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=j+1}^m t_{ij}^2 \quad (A-8)$$

$$= N_1 \cdot \text{tr}({}^t T_0 T_0) \quad (A-9)$$

ただし、行列 T_0 は

$$T_0 = \begin{bmatrix} t_{21} & & & & 0 \\ \vdots & t_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{m,m-1} & \end{bmatrix} \quad (A-10)$$

したがって P_s はつぎようになる。

$$P_s = \sigma^2 \cdot {}^t \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a} + N_1 \cdot \text{tr}({}^t T_0 T_0) \quad (A-11)$$

2. 雑音の最小値を与えるベクトル

式 (31) で与えられる雑音 U_m は、つぎのように行列 H を用いると分母は \mathbf{a} の二次形式となる。

$$U_m = \frac{N_1 ({}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{G})}{({}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{a})^2} = \frac{N_1 ({}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{G})^t}{\mathbf{a} H \mathbf{a}} \quad (A-12)$$

$$H = \begin{bmatrix} G_1 G_1 & \cdots & G_1 G_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_m G_1 & \cdots & G_m G_m \end{bmatrix} \quad (A-13)$$

変数を \mathbf{a} , \mathbf{G} , 行列 T_0 に取り、まず U_m の分母を最大にする \mathbf{a} を求める。Lagrange の未定定数を用い、電力条件式 (24) を用いて

$$L_1 = {}^t \mathbf{a} H \mathbf{a} - \lambda \cdot {}^t \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a} \quad (A-14)$$

を作ると

$$\frac{\partial L_1}{\partial a_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (A-15)$$

H , M は対称行列であるから上式より

$$\det(H - \lambda M) = 0 \quad (A-16)$$

$$L_1 = {}^t \mathbf{a} (H - \lambda M) \mathbf{a} = 0 \quad (A-17)$$

一方、行列 M の行列式はその定義より

$$\det M = \det({}^t T_1 T_1) = (\det T_1)^2 = 1 \quad (A-18)$$

したがって式 (A-16) より λ は行列 $M^{-1}H$ の最

大固有値でありまたそのときの雑音電力はつぎのように与えられる。

$$U_m = \frac{N_1 \sigma^2 \cdot ({}^t\mathbf{G} \cdot \mathbf{G})}{\lambda_M [P_s - N_1 \text{tr}({}^tT_0 T_0)]} \quad (\text{A-19})$$

$$\det(\lambda U - M^{-1}H) = 0 \quad (\text{A-20})$$

$$\lambda_M = \max\{\lambda\} \quad (\text{A-21})$$

しかるに行列 M , H の rank はそれぞれ m , 1 であるから行列 $M^{-1}H$ の rank は

$$\text{rank } M^{-1}H = 1 \quad (\text{A-22})$$

したがって行列 $M^{-1}H$ の固有方程式は

$$\lambda^m - w_1 \lambda^{m-1} = 0 \quad (\text{A-23})$$

$$w_1 = \text{tr}(M^{-1}H) \quad (\text{A-24})$$

となり最大固有値 λ_M は w_1 に等しい。

行列 $M^{-1}H$ を分解すると

$$\begin{aligned} w_1 = \lambda_M &= \frac{1}{\det M} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m 4_{ij} G_i G_j \\ &= {}^t\mathbf{G} M^{-1} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

ただし 4_{ij} は行列 M の余因子である。

よって雑音電力 U_m はつぎようになる。

$$U_m = \frac{\sigma^2 N_1 ({}^t\mathbf{G} \cdot \mathbf{G})}{{}^t\mathbf{G} M^{-1} \mathbf{G} \cdot [P_s - N_1 \text{tr}({}^tT_0 T_0)]} \quad (\text{A-26})$$

ベクトル \mathbf{G} と行列 T_0 とは独立に取れるから上式を \mathbf{G} で微分することにより

$$[({}^t\mathbf{G} M^{-1} \mathbf{G}) \cdot U - ({}^t\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) \cdot M^{-1}] \cdot \mathbf{G} = 0 \quad (\text{A-27})$$

したがって

$$\nu_1 = \frac{{}^t\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}}{{}^t\mathbf{G} M^{-1} \mathbf{G}} \quad (\text{A-28})$$

と置けば、式 (A-27) よりつぎようになる。

$$\det(\nu_1 U - M) = 0 \quad (\text{A-29})$$

また、そのときの雑音電力 U_m はつぎのように与えられる。

$$U_m = \frac{N_1 \sigma^2 \nu_1}{[P_s - N_1 \text{tr}({}^tT_0 T_0)]} \quad (\text{A-30})$$

3. ν の最小値 ν_1

いま、 ν の m 根の和を w とする。

$$w = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m \quad (\text{A-31})$$

w が一定かつ式 (36) を用いて最小値 ν_1 を求める。Lagrange の未定定数を λ_1, λ_2 として L を作り

$$L = \nu_1 - \lambda_1 (\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m) - \nu_1 \nu_2 \dots \nu_m \cdot \lambda_2 \quad (\text{A-32})$$

を ν_0 に関して微分すると

$$\nu_1 = \lambda_2 / (1 - \lambda_1) \quad (\text{A-33})$$

$$\nu_2 = \nu_3 = \dots = \nu_m = -\lambda_2 / \lambda_1 \quad (\text{A-34})$$

したがって式 (37) を示すことができた。

4. 雑音の最小値

式 (38) の分母を ν で微分し 0 とおくと式 (39) が得られるが、一方 ν には動きうる範囲があってそれは $\text{tr}({}^tT_0 T_0) > 0$ より式 (35) を用いて

$$w = \frac{1}{\nu^{m-1}} \cdot [1 + (m-1) \cdot \nu^m] > m \quad (\text{A-35})$$

であり、式 (39) の ν を上式に代入すれば

$$\begin{aligned} w - m &= 1 + \frac{P_s}{N_1} \left(1 + \frac{1}{m} \frac{P_s}{N_1}\right)^{m-1} - \left(1 + \frac{1}{m} \frac{P_s}{N_1}\right)^m \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{(m-1)!}{m^k \cdot (m-k)! (k-1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A-36})$$

したがって式 (39) の ν は動きうる範囲内にあり U_m の最小値は式 (40) のようになる。

5. 帰還路に雑音のある場合の最適化

式 (45) を用いて y_m を求めると

$$\begin{aligned} y_m &= \{c_m + d_m(a_m + b_m)\} x_0 + (c_m + b_m d_m) n'_{1, m-1} \\ &\quad + b_m d_m r_{m-1} n_{2, m-1} + d_m n_{1, m} \end{aligned} \quad (\text{A-37})$$

規格化条件より

$$c_m + d_m(a_m + b_m) = 1 \quad (\text{A-38})$$

これを (A-37) 式に代入して 2 乗平均すれば式 (47) のように U_m が求まる。さて式 (47) は d_m に関して二次式であるからその最小値を取れば

$$d_m = \frac{a_m U_{m-1}}{a_m^2 U_{m-1} + b_m^2 r_{m-1}^2 \cdot N_2 + N_1} \quad (\text{A-39})$$

$$\frac{U_m}{U_{m-1}} = \left[1 + \frac{a_m^2 U_{m-1}}{b_m^2 r_{m-1}^2 N_2 + N_1}\right]^{-1} \quad (\text{A-40})$$

となり、いま $a_m = -\zeta b_m$ として電力条件式 (48) を用い上式を書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{U_m}{U_{m-1}} &= \left[1 + \frac{\zeta^2 S_1 U_{m-1}}{r_{m-1}^2 N_2 S_1 + N_1 \{(\zeta - 1)^2 \sigma^2\}} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1}{+ r_{m-1}^2 N_2 + U_{m-1}}\right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A-41})$$

これを ζ で微分し、 r_{m-1} の値を式 (50) から代入すれば U_m を最小にする ζ はつぎようになる。

$$\zeta = \left(\frac{N_2}{S_2}\right) \left(1 + \frac{N_2}{S_2}\right) \left(1 + \frac{U_{m-1}}{\sigma^2}\right) + \frac{U_{m-1}}{\sigma^2} + 1 \quad (\text{A-42})$$

これを式 (A-41) に代入すれば式 (51) が求まる。ただし

$$\left(\frac{S}{N}\right)_m = \frac{\sigma^2}{U_m} \quad (\text{A-43})$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{m-1} = \frac{\sigma^2}{U_{m-1}} \quad (\text{A-44})$$

である。

(昭和 43 年 5 月 27 日受付)