

最適アナログ変調の一方式

尾佐竹 徇 田中 英彦

あらまし デジタル通信方式とはまた違った種々の特徴を持つアナログ通信方式の限界を定め、また良い通信方式を得ることへの第一歩として、事後確率を最大にするようなアナログ変調の最適受信方式を信号対雑音比の高いところで信号スペクトルを Gaussian Markov と仮定して近似的に解き、平均出力雑音を任意の振幅位相同時変調方式について求め、その式を基として通信路占有帯域と送信電力一定のもとに出力雑音を最小にするような最適アナログ通信方式を求めた。その結果、キャリアの位相と振幅とを信号で同時に変調すると、適当に変調することによって従来の FM などよりも、より高次の広帯域利得を得ることができることを示した。

1. ま え が き

通信の分野において“良い”通信方式を見出すことは興味ある問題である。通信の良さの評価基準には、通信品質、経済性、使い易さ等があるが、これらを用いて最適な通信方式を見出した通信の限界を見つけることは重要な問題である。情報理論では、一応 Shannon によって通信の限界が示されているが実際上その限界を達成する通信手段はまだ見つかっていない。PCM はかなり理想的な通信に近いものであるが、その理論的検討も進みこ一段落つきかけたところでまた通信方式を再検討する必要があるのではなからうか。デジタル方式とは種々の差違や利点、欠点を持つアナログ変調方式についてもまた調べ直す段階にあると思われる。従来までにアナログ変調方式と言えば、AM, PM, FM 等がありそれら個々の特性については調べられているが、それらを統一的に取扱う方法に乏しく、また最適アナログ変調方式についても全く解っていない。最適アナログ受信方式については今までに種々の研究がなされており^{(1),(2),(3)}、事後確率を最大にするという意味での最適受信方式がかなり一般的な形で求められている。しかしその最適受信方式の解析は式の複雑さのためまだなされていなかった。

本論文は、最適変調方式への一歩として任意の振幅位相同時変調に対する MAP 推定を用いた最適受信方式を SNR の高いところで解析し、変調信号を Gaussian Markov 形と仮定し、理想的伝送路、ガウス雑音を仮定して受信側の出力雑音電力を求め、それを送信電力と占有帯域制限のもとに最小にするような

最適変調方式について取り扱ったものである。

2. 最適受信方式の解析

2.1 最適受信方式

図 1 のような通信系を考える。雑音は加算的雑音とし、送るべき信号もガウス信号とすると、任意の変調

$$S(t) = S[t, a(t)] \quad (1)$$

に対する事後確率最大という意味での最適受信機は、つぎの式で与えられる⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} a^*(u) &= \int_{t-T}^t R_a(u, v) \cdot \left\{ \frac{\partial S[v, a(v)]}{\partial a(v)} \right\}_{a=a^*} g(v) dv \\ r(u) - S[u, a^*(u)] &= \int_{t-T}^t R_n(u, v) \cdot g(v) dv \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 R_a, R_n はそれぞれ信号 a 、雑音 n の covariance であり、 $r(u)$ が受信信号、 $a^*(u)$ が復調信号である。また $g(v)$ は式を簡潔に表現するために用いた媒介関数で、上 2 式を連立させて得られる。

この式は、変調関数 S にベースバンド信号そのままを入れるとよく知られた Wiener のフィルタになり、普通の AM を入れると定常的フィルタを備えた同期受信機になる。また PM を入れれば、ループ利得が入力 SNR によって変わるアダプティブな phase lock loop 受信機となる。

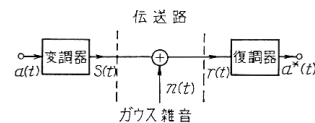


図 1 通信系モデル
Fig. 1—A model of communication system.

ところがこれらは一般に nonrealizable filter を回路内に持つため実現不可能であるが、定常的な受信を考え $T \rightarrow \infty$ とし時間 t においては $a(t)$ の推定出力を出すような受信を考えると、白色雑音 ($W_n(\omega) = N_0$)

尾佐竹 徇, 田中英彦: 正員 東京大学工学部電気工学科
An Optimum Analogue Communication System. By TONAU
OSATAKE and HIDEHIKO TANAKA, Members (Faculty of
Engineering, University of Tokyo, Tokyo).
論文番号: 昭 43-31 [B-10]

2, $-\infty < \omega < \infty$ のときは,

$$a^*(t) = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^t R_a(t-v) \cdot \left. \frac{\partial S(v)}{\partial a(v)} \right|_{a=a^*} \cdot [r(v) - S[v, a^*(v)]] dv \quad (3)$$

となり, これは図2のように普通の LCR で実現可能なフィルタを持つフィードバックループとして構成される。

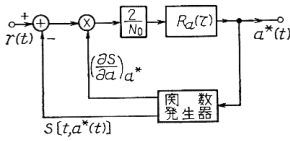


図2 最適受信機
Fig. 2—The optimum receiver.

2.2 振幅位相同時変調の受信出力

アナログ変調方式として, キャリヤ ω_c のつぎのような振幅位相同時変調を考える。

$$S(t) = \phi[a(t)] \cdot \cos[\omega_c t + \psi[a(t)]] \quad (4)$$

雑音 $n(t)$ を二つの直交成分に分けて式(4)を(3)に代入し, R_a が low pass のような性質を持っていることから周波数が $2\omega_c$ あたりの成分を除き, さらに入力 SNR が高いことを仮定すると, 式(3)はつぎのような Volterra 第2種積分方程式に帰着する(付録1参照). ($a=a(v)$).

$$N_0 \cdot a^*(t) + \int_{-\infty}^t R_a(t-v) \cdot [\phi'^2(a) + \phi^2(a) \cdot \psi'^2(a)] \cdot [a^*(v) - a(v)] dv = \int_{-\infty}^t R_a(t-v) \cdot [n_1(v) \cdot \phi'(a) - n_2(v) \phi(a) \cdot \psi'(a)] dv \quad (5)$$

これは一般に, 一様に収束する級数の形で解を求めることができるが(付録2参照), 信号 a が Gaussian Markov の場合はこの積分方程式が微分方程式に直るため, より明確な解を求めることができる。

すなわち信号スペクトル $W_a(\omega)$ として図3のごときものを仮定すると

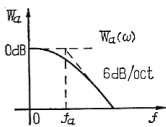


図3 信号の電力スペクトル
Fig. 3—Power spectrum of signal a.

$$W_a(\omega) = \frac{2\omega_a P_a}{\omega^2 + \omega_a^2} \quad -\infty < \omega < \infty \quad (6)$$

$$R_a(\tau) = P_a \cdot e^{-\omega_a |\tau|}$$

P_a は信号 a の平均電力, ω_a は 3dB down の周波数. 式(5)の両辺を t で微分し, もとの式と組み合わせるとつぎのような微分方程式が得られる。

$$N_0 \dot{e}(t) + [N_0 \omega_a + P_a \cdot P^2(a)] \cdot e(t) = Q(t) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= a^*(t) - a(t) \\ Q(t) &= P_a \cdot [n_1(t) \cdot \phi'(a) - n_2(t) \cdot \phi(a) \cdot \psi'(a)] \\ &\quad - N_0 \cdot [\dot{a}(t) + \omega_a a(t)] \\ P^2(a) &= \phi'^2[a(t)] + \phi^2[a(t)] \cdot \psi'^2[a(t)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし, $\dot{}$ は時間微分, ϕ' は関数 a による微分. この式は雑音に対する式であるがつぎのように解ける。

$$e(t) = \int_{-\infty}^t \frac{Q(v)}{N_0} \cdot \exp\left[-\int_v^t \left\{ \omega_a + \frac{P_a}{N_0} P^2[a(v_1)] \right\} dv_1\right] dv \quad (9)$$

これが最適受信出力の瞬時雑音である. 平均雑音電力 P_N は, これの二乗を信号 a と雑音 n とで集合平均すれば得られる. 集合平均を $E_{a,n}\{\}$ で表わすと,

$$P_N = E_{a,n}\{e^2\} \quad (10)$$

雑音だけで平均したものを上に $-$ を付けて表わすことにすれば式(9)より,

$$\left. \begin{aligned} P_N &= E_a\{\bar{e}^2\} \\ \bar{e}^2 &= \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t \frac{Q(u_1) \cdot Q(u_2)}{N_0^2} \\ &\quad \cdot \exp[-2F(t) + F(u_1) + F(u_2)] du_2 \\ F(t) &= \int^t \left\{ \omega_a + \frac{P_a}{N_0} P^2[a(v)] \right\} dv \quad (\text{不定積分}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし, $a_i = a(u_i)$ と置けば

$$\left. \begin{aligned} \overline{Q(u_1) \cdot Q(u_2)} &= P_a^2 \cdot R_n(u_1, u_2) \\ &\quad \cdot [\phi'(a_1) \cdot \phi'(a_2) + \phi(a_1) \cdot \phi(a_2) \psi'(a_1) \cdot \psi'(a_2)] \\ &\quad + N_0^2 (\dot{a}_1 + \omega_a a_1) (\dot{a}_2 + \omega_a a_2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)右辺の二つの項によって \bar{e}^2 を二つに分け, さらに R_n を雑音スペクトルで書き替えて,

$$\bar{e}^2 = \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_1^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t \frac{P_a^2}{N_0^2} \\ &\quad \cdot [\phi'(a_1) \cdot \phi'(a_2) + \phi(a_1) \cdot \phi(a_2) \psi'(a_1) \cdot \psi'(a_2)] \\ &\quad \times \exp[j\omega(u_1 - u_2) - 2F(t) + F(u_1) + F(u_2)] du_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_2^2 &= \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t (\dot{a}_1 + \omega_a a_1) (\dot{a}_2 + \omega_a a_2) \\ &\quad \cdot \exp[-2F(t) + F(u_1) + F(u_2)] du_2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

これらが, 信号が Gaussian Markov のときの任意の振幅位相同時変調に対する最適受信機の, “雑音のみによって平均した” 出力雑音電力である。

2.3 送信波の帯域と変調方式

送信波 $S(t)$ の帯域 B と変調関数 ϕ, ψ との関係調べよう. 送信波の電力スペクトルを $S(\omega)$ とお

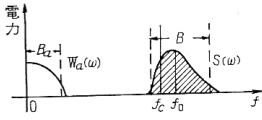


図4 送信波および変調信号のスペクトル
Fig. 4—Power spectra of transmitting signal and of modulating signal.

くと ($0 < \omega < \infty$), スペクトルの中心角周波数 ω_0 は,

$$\omega_0 = \int_0^\infty \omega \cdot S(\omega) \cdot \frac{d\omega}{2\pi} / \int_0^\infty S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (17)$$

帯域を電力スペクトルの平均値の周りの二次モーメントで定義すれば,

$$\left(\frac{2\pi B}{2}\right)^2 = \int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 \cdot S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} / \int_0^\infty S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (18)$$

送信波の平均電力を P_s として, Perseval の公式より,

$$(\pi B)^2 \cdot P_s = \int_0^\infty \omega^2 S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} - \omega_0^2 \cdot P_s \quad (19)$$

右辺第1項は, 微分波 $\dot{S}(t)$ の電力 $P_{\dot{S}}$ であり, これは

$$2P_{\dot{S}} = E_{\dot{a}}\{P^2(a)\dot{a}^2 + \omega_c^2 \phi^2(a) + 2\omega_c \phi^2(a) \cdot \psi'(a) \cdot \dot{a}\} \quad (20)$$

で与えられ, 信号 a が Gaussian であることと, その帯域 B_a が 0 周波数の周りの二次モーメントから

$$E_{\dot{a}}\{\dot{a}^2\} = (2\pi B_a)^2 \cdot P_a \quad (21)$$

となることを用いて帯域 B はつぎのようになる。

$$B^2 = 4(f_c^2 - f_0^2) + 2B_a^2 \frac{P_a}{P_s} \cdot E_a\{P^2(a)\} \quad (22)$$

これが変調関数と帯域の関係である。すなわち中心周波数 f_0 が定まると帯域は, 変調関数の関数 $P^2(a)$ (式(8))の平均のみで定まる。キャリアと中心周波数とが一致する場合 ($f_c = f_0$) は, $E_a\{P^2(a)\} = \hat{P}^2$ として,

$$B^2 = 2B_a^2 \cdot \hat{P}^2 \cdot P_a / P_s \quad (23)$$

以後式(23)の関係を用いることにする。

2.4 雑音出力 P_N の解析

2.2 で求めた雑音電力式 $e^{\bar{e}}$ は, 雑音での平均がなされているが送信信号 a での平均がなされていない。式(12)のように a の集合平均したものが出力の平均雑音電力 P_N である。 $a(t)$ は時間波形であるから, a で平均を取るためには波形平均を取らねばならない。ところが式(12)の $e^{\bar{e}}$ を見ると指数関数内に a の関数 $P^2(a)$ の時間積分が入っているため解析は少々むずかしくなる。そこで, ここでは関数 $P^2(a)$ があまり変化しない場合について考えることにする。今, 指数項内の積分を平均値と変化分とに分けて

$$\frac{P_a}{N_0} \int_u^t P^2[a(v)] dv = \frac{P_a}{N_0} \cdot \hat{P}_a \cdot (t-u) + \epsilon(u) \quad (24)$$

$$\epsilon(u) = \frac{P_a}{N_0} \int_u^t \{P^2[a(v)] - \hat{P}^2\} dv \quad (25)$$

と置く, 指数項は $\epsilon(u)$ が小さいところでは $\epsilon(u)$ の一次で近似ができ, また $t-u$ が大きいところでは $\epsilon(u)$ はあまり大きくならない ($\infty \sqrt{t-u}$) うえに平均値の項が充分大きくなるので, 全体としての影響は少ない。したがってつぎのような近似が可能である。

$$\exp\left[-\frac{P_a}{N_0} \int_u^t P^2[a(v)] dv\right] \approx \exp[-\eta \omega_a (t-u)] \cdot [1 - \epsilon(u)] \quad (26)$$

$$\eta = P_a \cdot \hat{P}^2 / N_0 \omega_a \quad (27)$$

つぎに変調関数をベキ展開してつぎのように置く。

$$\phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{(\sqrt{P_a})^{n-1}} a^n,$$

$$\psi'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{(\sqrt{P_a})^{n+1}} a^n \quad (28)$$

するとつぎのような関係が存在する。

$$\begin{aligned} &\phi'(a_1) \cdot \phi'(a_2) + \phi(a_1) \phi(a_2) \psi'(a_1) \cdot \psi'(a_2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u(n, m)}{(\sqrt{P_a})^{n+m}} \cdot a_1^n \cdot a_2^m \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(n, m) &= (n+1)(m+1)x_{n+1} \cdot x_{m+1} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_{n-i} \cdot x_{m-j} \cdot y_i y_j \quad (30) \end{aligned}$$

また, 送信電力 P_s と帯域 B (この代わりに \hat{P}^2 ; 式(23)) とを変調関数の展開係数で表わすと, 信号 a での集合平均を行なって (付録3, 式(A12)参照),

$$P_s = E_a\{S^2\} = \frac{P_a}{2} \sum_{\substack{n, m=0 \\ (n+m=\text{even})}}^{\infty} (n+m-1)!! \cdot x_n x_m \quad (31)$$

$$\hat{P}^2 = \sum_{\substack{n, m=0 \\ (n+m=\text{even})}}^{\infty} (n+m-1)!! \cdot u(n, m) \quad (32)$$

となる。ところで式(27)で与えられる η は式(23)を用いると, $2\pi f_a = \omega_a$ また f_n を雑音の受信帯域として,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_a \hat{P}^2}{N_0 \omega_a} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{f_n}{f_a} \cdot \frac{P_s}{N_0 f_n} \cdot \left(\frac{B}{B_a}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{f_n}{f_a} \cdot \left(\frac{B}{B_a}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_{in} \quad (33) \end{aligned}$$

となり, 入力 SNR が大きいときはかなり大きい値をとることがわかる。

さて最終的な平均雑音電力 P_N は式(14)に示すように式(15), (16)で与えられる雑音成分 $e_1^{\bar{e}}$, $e_2^{\bar{e}}$ を信号 a で集合平均すればよい。式(26)の一次近似をそれらに用いてから変調関数を式(28)のベキの形で代入し, 信号が図3のように Gaussian Markov であることを用いて集合平均を実行すれば, η が大きい

ことからつぎのように雑音電力が求まる(付録3参照).

まず $\overline{e_1^2}$ 成分については, 雑音の受信帯域を f_n として

$$P_{N_1} = E_a \{ \overline{e_1^2} \} = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} - \frac{2 N_0 f_n}{\hat{P}^2} (H-1) \quad (34)$$

$$H = \frac{\sum_{\substack{n, m, l, k=0 \\ (n+m+l+k=\text{even})}} u(n, m) \cdot u(l, k)}{(H-1)^2} \cdot (n+m+l+k-1)!! \quad (35)$$

つぎに $\overline{e_2^2}$ 成分は変調関数形が陽に効いてこないで,

$$P_{N_2} = E_a \{ \overline{e_2^2} \} = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot \frac{4}{\eta} \quad (36)$$

ところで η は式(33)に示すように入力 SNR が大きいときは充分大きな値であり, したがって一般に P_{N_2} は P_{N_1} に比して一次オーダーが低く, 全雑音電力 $P_N = P_{N_1} + P_{N_2}$ を考えるときは P_{N_2} を無視することができる.

ゆえに全雑音電力は式(34)を用いて

$$P_N \doteq P_{N_1} \quad (37)$$

のように求めることができた.

2.5 雑音式の適用例

上に求めた雑音式を用い, $P^2(a) = \text{一定}$ という簡単な場合の出力 SNR を示そう. 変調関数の関数 $P^2(a)$ は,

$$P^2(a) = \phi'^2(a) + \phi^2(a) \cdot \psi'^2(a) \quad (8)$$

で与えられるから, $P^2 = c_0^2$ の場合は, たとえばつぎのような変調を行なっているときに相当する.

① $\phi'(a) = c_0, \phi(a) \cdot \psi'(a) = 0$

すなわち $\phi(a) = c_0 \cdot a + c_1, \psi(a) = c_2$ で AM に相当する.

② $\phi'(a) = 0, \phi(a) \psi'(a) = c_0$

すなわち $\phi(a) = c_1, \psi(a) = c_0/c_1 \cdot a + c_2$ で PM に相当する.

さてこのように普通の AM や PM 等も含む, $P^2 = \text{一定}$ の場合, 式(25)より $\varepsilon(u) = 0$ したがって式(35)の $H=1$, ゆえに平均出力雑音 P_N は式(34)から

$$P_N \doteq \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} = \frac{2 N_0 f_n B_a^2 P_a}{B^2 P_s} \quad (38)$$

したがって出力 SNR はつぎのように求められる.

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{OUT}} = \frac{P_a}{P_N} = \frac{1}{2} \frac{P_s}{N_0 f_n} \cdot \left(\frac{B}{B_a} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{B_a} \right)^2 \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{IN}} \quad (39)$$

3. 最適変調方式

前章で得た任意の振幅位相同時変調に対する最適受

信機の出力平均雑音電力式を基にして, ここでは送信電力と占有帯域一定のもとに出力 SNR を最大にするような変調方式を求める. 直接雑音式(34)を取り扱うのは複雑であるので, 始めに振幅変調をとまわらない場合の最適位相変調関数を求め, つぎに簡単な振幅位相同時変調に言及してゆこう.

3.1 最適位相変調

振幅変化項 $x_n = 0 (n \geq 1)$ のとき, 展開係数の関数 $u(n, m)$ は式(30)より位相変調関数の展開係数 y_n を用いてつぎのようになる.

$$u(n, m) = x_0^2 y_n y_m \quad (40)$$

位相変調関数 $\psi(a)$ は, 直線 PM よりあまり離れないとすると,

$$|y_0| \gg |y_n| \quad n \geq 1 \quad (41)$$

このとき, 雑音電力の変調方式による変化項 H , および帯域の二乗に比例する項 \hat{P}^2 は式(35), (32)よりつぎのように近似することができる. ($\Delta P_N \propto -H$)

$$H \doteq \left(\frac{x_0^2}{\hat{P}^2} \right)^2 \cdot [y_0^4 + 4 y_0^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!! \cdot y_{2n}] \quad (42)$$

$$\hat{P}^2 \doteq x_0^2 \cdot [y_0^2 + 2 y_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!! \cdot y_{2n}] \quad (43)$$

ただし, 振幅定数項 x_0 は送信電力条件(31)より

$$x_0 = \sqrt{2 P_s / P_a} \quad (44)$$

となる. 式(43)を式(42)に代入すると,

$$H \doteq \left(\frac{x_0^2}{\hat{P}^2} \right)^2 \cdot \left[- \left(y_0^2 - \frac{\hat{P}^2}{x_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{P}^2}{x_0^2} \right)^2 \right] \quad (45)$$

したがって, H は y_0 のみの関数として図5のように変化する. ゆえに, 位相変調関数の, 変調関数による微分 $\psi'(a)$ の定数項 y_0 が

$$y_0^2 = \hat{P}^2 / x_0^2 \quad (46)$$

となるとき, H が最大すなわち雑音電力 P_N が最小になる. また \hat{P}^2 が任意の位相関数 $\{y_n\} n \geq 1$ に対して常に正であるから

$$y_n = 0 \quad n \geq 1 \quad (47)$$

すなわち, 位相変調関数は直線的なものが locally optimum である.

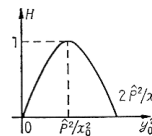


図5 y_0 に対する H の変化
Fig. 5— H vs. y_0 .

3.2 最適振幅位相同時変調

前節で, 振幅変調をとまわらないときは直線 PM が locally optimum だということが示されたが, つ

ぎに直線 PM に AM をかけた変調を考える。変調関数 ϕ, ψ として最も単純なつぎのものを考える。

$$\phi(a) = x_0 \sqrt{P_a} + x_1 \cdot a \quad (48)$$

$$\psi(a) = y_0 / \sqrt{P_a} \cdot a \quad (49)$$

このとき展開係数の関数 $u(n, m)$ は, $u(0, 0), u(1, 0), u(1, 1)$ の 3 種しか存在せず, 雑音変化項 H , 送信電力 P_s , 帯域決定項 \hat{P}^2 は (31), (32), (35) の諸式からつぎのように与えられる。(注 $4 P_N \propto -H$)

$$H = [u^2(0, 0) + 4u^2(1, 0) + u^2(1, 1)] / (\hat{P}^2)^2 \quad (50)$$

$$\hat{P}^2 = u(0, 0) + u(1, 1) \quad (51)$$

$$P_s = (x_0^2 + x_1^2) \cdot P_a / 2 \quad (52)$$

したがって, $z = x_1^2$ と置けば H は式 (52), (53) を用いてつぎのような z のみの関数となる。

$$H = 1 + \frac{2}{(r\hat{P}^2)^2} \cdot (\hat{P}^2 z - z^2) \cdot [z^2 - (2r + \hat{P}^2)z + r\hat{P}^2] \quad (53)$$

ただし, パラメータ r は $r = 2P_s/P_a$ であり, 展開係数 x_0, y_0, x_1 を z で表わせばつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \sqrt{r-z}, \quad x_1 = \sqrt{z} \\ y_0 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{B}{B_a} \right)^2 - \frac{z}{r}} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

また電力パラメータ r と \hat{P}^2 と帯域との間の関係は式 (32) を用いることによりつぎのように決定される。

$$\frac{\hat{P}^2}{r} = \frac{P_a \hat{P}^2}{2P_s} = \frac{1}{4} \left(\frac{B}{B_a} \right)^2 \quad (55)$$

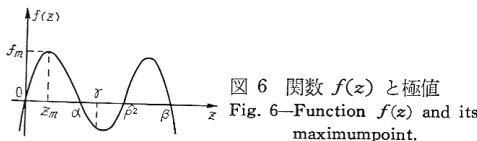
このように雑音電力の変化項 H は z のみの関数として表わされたから, z の取りうる範囲 (式 (54) の実数条件から)

$$0 \leq z \leq r, \quad 0 \leq z \leq \hat{P}^2 \quad (56)$$

内で H の最大値 H_{\max} を求めればそれが雑音電力 P_N 最小となるときである。今 z の関数として

$$f(z) = (\hat{P}^2 z - z^2) \cdot [z^2 - (2r + \hat{P}^2)z + r\hat{P}^2] \quad (57)$$

を考え, これを図示すると図 6 のようになる。



ただし, α, β はつぎのような値である。

$$\left(\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right) = \frac{1}{2} [(2r + \hat{P}^2) \mp \sqrt{4r^2 + (\hat{P}^2)^2}] \quad (58)$$

ところで, 明らかに $\alpha < r$ でありまた, α, β は正根であるから, 式 (56) の範囲内で $f(z)$ のの最大値は $f(z)$ の最初の極値で生じる。ゆえに三次方程式 (3 実根を持つ),

$$f'(z) = r(\hat{P}^2)^2 - 2[3r\hat{P}^2 + (\hat{P}^2)^2]z + 6(r + \hat{P}^2)z^2 - 4z^3 = 0 \quad (59)$$

の最小根が最適変調を定める z_m である。

式 (59) の数値解を示す前に傾向を見るため, 四次曲線 $f(z)$ を z_m の辺りで二次曲線とみなすと (安全側)

$$z_m \approx \alpha / 2 \quad (60)$$

だから, これを $f(z)$ に代入し H_{\max} を求めると, 式 (55) を使って,

$$H_{\max} \approx 1 + \frac{1}{\xi^4} \left[16 - 2\xi^2 + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^8}{256} + \left(\frac{\xi^6}{64} - \xi^2 - 8 \right) \sqrt{4 + \frac{\xi^4}{16}} \right] \quad (61)$$

ただし, ξ は, $\xi = B/B_a$

ξ の大きいところ, すなわち送信波の占有帯域 B が広いところで式 (61) を近似すれば,

$$H_{\max} \approx 3/2 - 4/\xi^2 \quad (62)$$

ゆえに出力雑音 P_N は, 式 (34) より

$$P_N \approx \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot [1 - 2(H_{\max} - 1)] \approx \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot \frac{8}{\xi^2} \quad (63)$$

したがって出力 SNR はつぎのようになる。

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{OUT}} = \frac{P_a}{P_N} \approx \frac{1}{16} \left(\frac{B}{B_a} \right)^4 \cdot \frac{P_s}{N_0 f_n} \approx \frac{1}{16} \left(\frac{B}{B_a} \right)^4 \cdot \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{IN}} \quad (64)$$

このように帯域が広いと出力 SNR は帯域の四乗に比例することが解る。

さて実際に三次方程式 (59) を解いて $z_m (= x_1^2), H_{\max}$ 等を求めると表 1, 図 7 のようになる。

ただし μ, G は, それぞれつぎのように定義される値である。

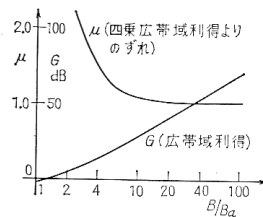


図 7 占有帯域と広帯域利得
Fig. 7-Transmitting bandwidth and wide bandwidth gain.

表 1 極値の計算値

B/B_a	最適パラメータ z_m/r	雑音の減少項 H_m	四乗則よりのずれ μ
2	0.1624	1.147	2.830
5	0.3942	1.373	1.257
10	0.4708	1.462	1.061
20	0.4925	1.490	1.016
30	0.4967	1.496	1.007

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{OUT}} = \frac{\mu}{16} \cdot \left(\frac{B}{B_a}\right)^4 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}} = G \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}} \quad (65)$$

すなわち μ は出力 SNR が帯域の四乗に比例することからのずれを表わし、 G は変調方式の広帯域利得を表わす。図から明らかなように z_m の近似は帯域の広いところで充分正しく成立していることが解る。

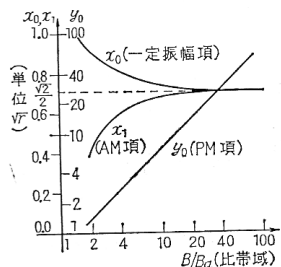


図 8 最適パラメータ x_0, x_1, y_0 .
Fig. 8—Optimum values of parameters x_0, x_1, y_0 .

上述の最適変調方式は、表 1 の z_m を式 (54) に代入して振幅変調関数の展開係数 x_0, x_1 および位相変調関数の比例項 y_0 (変調指数に相当する) を求めることにより図 8 のようになる。この最適性はそう厳しいものでなく、係数 x_0, x_1, y_0 がこの最適値より少しずれた値を取っても出力 SNR が帯域の四乗に比例するという性質は失なわれない。これは z_m に対して用いた近似の成立することからも明らかである。

4. 結果の検討および問題点

前章で最適な振幅位相同時変調を求めその特性を調べて出力 SNR が帯域の四乗に比例するというを示したが、その結論にはまだ検討すべきところが多い。最適受信機の出力雑音を変調信号波形 $a(t)$ で平均する前の式 (15), (16) はかなり正確な式であるが、変調信号で集合平均する段階において用いた指数関数の近似がまず問題である。この近似は $P^2(a)$ があまり変化しない範囲でしか成立しないので、一般的な変調方式を一手に表わしているとは言えない。しかし、前章で述べたようにアナログ変調では、普通の FM などに見られるような、占有帯域の二乗に比例する広帯域利得よりも、より高次の利得を得ることのできる可能性があり、今後これらの式を基としてより詳しい解析が望まれる。またここでは変調方式として式 (4) に与えたような振幅位相の同時変調を仮定したが、一般の変調方式は必ずしもこの形で表すことができず積分微分等やその他時間的な因子を含む場合も考えられるので、この仮定が適用アナログ変調の範囲を狭めている恐れがある。帯域に関しても二乗平均帯

域以外で調べる必要があるし、キャリア周波数とスペクトルの中心周波数との相違から、 $P^2(a)$ が一定 (すなわち出力 SNR 一定) でも帯域の狭い方式を見出す可能性も存在する。その他、低 SNR における問題、限界値問題なども今後に残された問題である。

5. むすび

アナログ通信方式における最適受信方式を解析し、雑音式を与え、その式を基として出力 SNR を占有帯域と送信電力一定のもとに最大にするような最適変調方式を求めたところ、従来の FM 等よりもより高次の広帯域利得を持つ変調方式が存在することを示した。

これらの結果がすぐにアナログ通信の限界を与えるものとは言えないが、そこに至る一步として考察を加えたものである。まだ検討に残された事柄は多く今後の研究の課題であるが、この方面に関心のある方々の御参考になれば幸いである。

謝辞 本研究を進めるに当り、種々御世話になった本学秋山稔助教授、および尾佐竹、秋山両研究室の方々に感謝する。

文 献

- (1) J.B. Thomas and E. Wong: "On the statistical theory of optimum demodulation", IRE Trans., IT-6, p. 420 (Sept. 1960).
- (2) H.L. Van Trees: "The structure of efficient demodulation for multidimensional phase modulated signals", IEEE Trans., CS-11, p. 261 (Sept. 1963).
- (3) H.L. Van Trees: "Bound on accuracy attainable in the estimation of continuous random process", IEEE Trans., IT-21, p. 298 (July 1966).
- (4) 田中英彦: "最適受信方式の信号対雑音比", 昭 42 連大, 2263.
- (5) 田中英彦: "最適通信方式及び網構成に関する研究", 東京大学修士論文, 昭和 42 年 3 月.

付録 1 最適受信機の近似式

式 (4) を (3) に代入して周波数 $2\omega_c$ あたりの成分を除いて

$$\begin{aligned} a^*(t) = & \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^t R_a(t-v) \{ [\phi(a) \cdot \phi'(a^*) \\ & + n_1(v) \phi'(a^*) - n_2(v) \phi(a^*) \psi'(a^*)] \\ & \times \cos[\psi(a^*) - \psi(a)] - [\phi(a) \phi(a^*) \psi'(a^*) \\ & + n_1(v) \cdot \phi(a^*) \psi'(a^*) + n_2(v) \phi'(a^*)] \\ & \cdot \sin[\psi(a^*) - \psi(a)] - \phi(a^*) \cdot \phi'(a^*) \} dv \end{aligned} \quad (A1)$$

ただし $a = a(v), a^* = a^*(v)$
さらに SNR が高いことを仮定すると a^* は a に

近いから a^*-a の一次近似によって

$$\left. \begin{aligned} \phi(a^*) &= \phi(a) + (a^*-a) \cdot \phi'(a), \\ \cos[\psi(a^*) - \psi(a)] &\doteq 1 \\ \psi(a^*) &= \psi(a) + (a^*-a) \cdot \psi'(a), \\ \sin[\psi(a^*) - \psi(a)] &\doteq (a^*-a) \psi'(a) \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

が成立する。この近似を式 (A1) に適用し、 a^*-a の二次以上の項を省くことにより式 (5) を得る。

付録 2 積分方程式の一般解

$$\left. \begin{aligned} K(t, v) &= R_a(t-v) \cdot [\phi'^2(a) + \phi^2(a) \cdot \psi'^2(a)] \\ f(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{R_a(t-v)}{N_0} \\ &\quad \cdot [n_1(v) \phi'(a) - n_2(v) \phi(a) \psi'(a)] dv \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

と置けば式 (5) の一般解はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a^*(t) &= a(t) + f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{N_0} \right)^n \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^t k_n(t, v) \cdot f(v) dv \\ k_n(t, v) &= \int_{-\infty}^t k(t, u) \cdot k_{n-1}(u, v) du \\ k_1(t, v) &= k(t, v) \end{aligned} \right\} \quad (A4)$$

付録 3 雑音電力 \bar{e}^2 の信号集合平均

式 (15) に (26) の近似を用いると

$$\begin{aligned} \bar{e}_1^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^t du_1 \\ &\quad \int_{-\infty}^t [\phi'(a_1) \phi'(a_2) + \phi(a_1) \phi(a_2) \psi'(a_2) \psi'(a_2)] \\ &\quad \times \exp[j\omega(u_1 - u_2) - \omega_a(\eta+1)(2t - u_1 - u_2)] \\ &\quad \times P_a^2 / N_0^2 \cdot [1 - \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)] du_2 \end{aligned} \quad (A5)$$

$\varepsilon(u)$ に式 (25) を代入して上の積分を関数形により分け、さらに変調関数をベキ展開して信号 a で集合平均すると、雑音成分 P_{N1} はつぎのように書くことができる。

$$P_{N1} = E_a\{\bar{e}_1^2\} = K_1 - K_2 + K_3 \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{P_a^2}{N_0^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{u(n, m)}{(\sqrt{P_a})^{n+m}} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\quad \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t E_a\{a_1^n a_2^m\} \times \exp[j\omega(u_1 - u_2) \\ &\quad - \omega_a(\eta+1)(2t - u_1 - u_2)] du_2 \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= 2 \left(\frac{P_a}{N_0} \right)^3 \cdot \sum_{n,m,l=0}^{\infty} \frac{l}{k=0} \frac{u(n, m) u(l-k, k)}{(\sqrt{P_a})^{n+m+l}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t du_2 \int_{u_1}^t \\ &\quad \times E_a\{a_1^n a_2^m a_3^l\} \cdot \exp[j\omega(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

$$- \omega_a(\eta+1)(2t - u_1 - u_2)] du_3 \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} K_3 &= 2 \left(\frac{P_a}{N_0} \right)^3 \hat{P}^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{u(n, m)}{(\sqrt{P_a})^{n+m}} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\quad \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t E_a\{a_1^n a_2^m\} \times (t - u_1) \\ &\quad \cdot \exp[j\omega(u_1 - u_2) - \omega_a(\eta+1)(2t - u_1 - u_2)] du_2 \end{aligned} \quad (A9)$$

ここで信号 a が定常であり、 a の集合平均と積分の順序を入れ替えることができることを利用した。

さて信号は Gaussian Markov だから時刻 u_1, u_2, u_3 における信号の値 a_1, a_2, a_3 の密度関数は、たとえば $u_3 \geq u_1 \geq u_2$ のときつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \text{Prob}(a_1, a_2, a_3) &= (2\pi P_a)^{-3/2} \cdot (1 - \rho_1^2)^{-1/2} \cdot (1 - \rho_2^2)^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2 P_a} \left\{ \frac{1 - \rho_1^2 \rho_2^2}{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)} a_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_2^2}{1 - \rho_1^2} + \frac{a_3^2}{1 - \rho_2^2} - \frac{2 a_1 a_2}{1 - \rho_1^2} \rho_1 - \frac{2 a_1 a_3}{1 - \rho_2^2} \rho_2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \rho_1 &= \exp[-\omega_a(u_3 - u_1)], \\ \rho_2 &= \exp[-\omega_a(u_1 - u_2)] \end{aligned}$$

ここで a から b の変数変換

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{2 P_a}}, \quad b_2 = \frac{a_2 - a_1 \rho_1}{\sqrt{2 P_a}(1 - \rho_1^2)}, \\ b_3 &= \frac{a_3 - a_1 \rho_2}{\sqrt{2 P_a}(1 - \rho_2^2)} \end{aligned} \quad (A11)$$

を行なうと、 K_1 等に含まれる集合平均はたとえば $u_3 \geq u_1 \geq u_2$ のときつぎのようになる。

$$\begin{aligned} E_a\{a_1^n a_2^m a_3^l\} &= (\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} db_1 \int_{-\infty}^{\infty} db_2 \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} (2 P_a)^{n+m+l/2} b_1^l \times (r_1 b_2 + \rho_1 b_1)^m (r_2 \rho_3 + \rho_2 b_1)^l \\ &\quad \cdot \exp[-(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] db_3 \\ &= \frac{\sum_{p_1=0}^{[m/2]} \sum_{p_2=0}^{[l/2]} (P_a/2)^{n+m+l/2} \cdot (n+m+l-2p_1-2p_2)! m! l!}{\left(\frac{n+m+l}{2} - p_1 - p_2 \right)! p_1! p_2! (m-2p_1)! (l-2p_2)!} \\ &\quad \times \rho_1^{m-2p_1} \cdot (1 - \rho_1^2)^{p_1} \cdot \rho_2^{l-2p_2} \cdot (1 - \rho_2^2)^{p_2} \\ &\quad \begin{cases} \text{for } n+m+l = \text{even} \\ \text{for } n+m+l = \text{odd} \\ 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\text{ただし } r_1 = \sqrt{1 - \rho_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{1 - \rho_2^2}$$

また Σ の上限の $[\]$ はガウス記号である。

このようにして求めた集合平均を信号の時間関係を考慮しながら K_1, K_2, K_3 各々に代入すれば雑音の平均電力成分がでてくる。たとえば、 K_1 は雑音の受信帯

域を $f_n(2\pi f_n = \omega_n)$ としてつぎのようになる.

$$K_1 = \frac{P_a^2}{2\pi(\eta+1)N_0\omega_a} \sum_{\substack{n,m=0 \\ n+m=\text{even}}}^{\infty} \alpha_{n,m} \cdot u(n, m) \quad (A13)$$

ここで $\alpha_{n,m}$ は伝送路雑音が白色のときは

$$\alpha_{2n,2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2m/2}$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{\min\{n,m\}} \frac{2^{2l} \cdot (2n)! (2m)!}{(2l)! (n-l)! (m-l)!} \tan^{-1} \left[\frac{\omega_n}{\omega_a(\eta+1+2l)} \right] \quad (A14)$$

ただし $n+m=\text{even}$ となるもう一つの形 $\alpha_{2n+1, 2m+1}$ は、上式の $2n \rightarrow 2n+1, 2m \rightarrow 2m+1, 2l \rightarrow 2l+1$ としたものである.

K_2, K_3 も同様にして求めることができるが、これらの式は煩雑であるのでここで使い易いように近似を行なう. パラメータ η は (式 (33)) 入力 SNR が大きいときはかなり大きな値であり、これを用いて良い近似が可能である. 雑音成分の諸式を見るといずれも $\tan^{-1}[\omega_n/\omega_a(\eta+k)]$ という項を含み、 ω_n は受信雑音帯域、 ω_a は信号帯域であるが η が充分大きいのでつぎの近似式が精度良く成立する.

$$\tan^{-1} \left[\frac{\omega_n}{\omega_a(\eta+k)} \right] \doteq \frac{\omega_n}{\omega_a(\eta+k)} \quad (A15)$$

ところで k は変調関数 ϕ, ψ をベキ展開したときの a の次数と同程度の値であるからあまり大きくなくしたがって $k \ll \eta$ である. 雑音式中他の所に出てくる $\eta+k$ についても $\doteq \eta$ と近似すると諸式は簡潔に表わすことができる (k を考慮しても大差ないことを示すことができる).

まず K_1 について、式 (A14) を変形すれば

$$\alpha_{2n,2m} \doteq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \cdot \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{m-k} \frac{(2m)! (2n+2k)! (-1)^l}{(n+k)! (m-k-l)! l! (2k)!} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_a \eta} \quad (A16)$$

となり、ここで項公式

$$\sum_{l=0}^{m-k} \frac{(-1)^l}{(m-k-l)! l!} = \frac{1}{(m-k)!} \sum_{l=0}^{m-k} \binom{m-k}{l} (-1)^l = \delta_{mk} \quad (A17)$$

を用いると、 $n+m=\text{even}$ のとき一般に

$$\alpha_{n,m} \doteq (n+m-1)!! \cdot \omega_n / \omega_a \eta \quad (A18)$$

したがって式 (A13) より、式 (32) を利用して、

$$K_1 \doteq \frac{P_a^2 \omega_n}{2\pi N_0 \omega_a^2 \eta^2} \cdot \sum_{\substack{n,m=0 \\ n+m=\text{even}}}^{\infty} (n+m+1)!! \cdot u(n, m) \\ \doteq \frac{P_a^2 \omega_n \cdot \hat{P}^2}{2\pi N_0 \omega_a^2 \eta^2} = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \quad (A19)$$

K_2 に対しても同様な近似を用いて

$$K_2 \doteq \frac{2 N_0 f_n}{(\hat{P}^2)^3} \cdot \sum_{\substack{n,m,l,k=0 \\ n+m+l+k=\text{even}}}^{\infty} u(n, m) \cdot u(l, k) \cdot (n+m+l+k-1)!! \quad (A20)$$

K_3 は同じく

$$K_3 \doteq 2 \left(\frac{P_a}{N_0} \right)^3 \cdot \hat{P}^2 \cdot \sum_{\substack{n,m=0 \\ n+m=\text{even}}}^{\infty} \frac{N_0 \omega_n}{2\pi \omega_a^3 \eta^3} \cdot u(n, m) \cdot (n+m-1)!! \\ \doteq \frac{2 P_a^3 \cdot (\hat{P}^2)^2}{2\pi N_0^2 \omega_a^3 \eta^3} = 2 \cdot \frac{N_0 f_n}{\hat{P}_2} \quad (A21)$$

以上、式 (A6) を用いて K_i を加え合わせることにより、雑音成分 P_{N_1} の式 (34) がでてくる.

さてつぎに雑音成分 P_{N_2} を求めよう. この成分は小さいので値評価の意味から微小項 $\epsilon(u)$ に相当する部分を見捨てて調べる. まず式 (16) より

$$\bar{e}_2^2 \doteq \int_{-\infty}^t du_1 \int_{-\infty}^t (\dot{a}_1 + \omega_a a_1) (\dot{a}_2 + \omega_a a_2) \cdot \exp[-\omega_a(\eta+1) \times (2t-u_1-u_2)] du_2 \quad (A22)$$

信号 a は定常的だから

$$E_a \{ (\dot{a}_1 + \omega_a a_1) (\dot{a}_2 + \omega_a a_2) \} \\ = \int_{-\omega_n}^{\omega_n} W_a(\omega) \cdot (\omega^2 + \omega_a^2) \cdot e^{j\omega(u_1-u_2)} \cdot \frac{d}{2\pi} \omega \quad (A23)$$

$W_a(\omega)$ として式 (6) を用い上式を式 (A29) に入れると

$$P_{N_2} = E_a \{ \bar{e}_2^2 \} \doteq \frac{4 P_a}{2\pi(\eta+1)} \tan^{-1} \left[\frac{\omega_n}{\omega_a(\eta+1)} \right] \\ \doteq \frac{4 P_a f_n}{\omega_a \eta^2} = \frac{N_0 f_n}{\hat{P}^2} \cdot \frac{4}{\eta} \quad (A24)$$

こうして式 (36) を求めることができた.

(昭和42年5月26日受付)